UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

FÍSICA 1

Jorge Luis López

Olga Noemí Gómez de Flämig

EDITORIAL UNIVERSITARIA

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870
Posadas - Misiones - Tel-Fax: (03752) 428601

Correos electrónicos:
edunam-admini@arnet.com.ar
edunam-direccion@arnet.com.ar
edunam-produccion@arnet.com.ar
edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra

Coordinación de la edición: Claudio O. Zalazar

Armado de interiores: Javier B. Giménez

Corrección: Julia E. Renaut

López, Jorge Luis
Física 1. - 1a ed. - Posadas: EdUNaM - Editorial Universitaria de la Universidad Nacional de Misiones, 2010.
144 p.; 30x21 cm.
ISBN 978-950-579-153-8
1. Física. I. Título
CDD 531.113

Fecha de catalogación: 23/03/2010

ISBN: 978-950-579-153-8
Impreso en Argentina

ÍNDICE

LOS AUTORES

JORGE LUÍS LÓPEZ
Ingeniero Mecánico, Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Nordeste.
Profesor Universitario de Tecnología - Universidad Gastón Dachary.
Profesor Adjunto Regular de la asignatura Física 1 - Facultad de Ingeniería - UNaM.

OLGA NOEMÍ GÓMEZ DE FLAMÏG
Licenciada en Física, Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de San Luis.
Especialista en Educación Superior - Facultad de Ingeniería - UNaM.
Profesor Titular Regular de la asignatura Física 1 - Facultad de Ingeniería - UNaM.

SISTEMA DE UNIDADES

En Mecánica existen cuatro magnitudes[1] fundamentales a saber: longitud, masa, tiempo y fuerza (para el Sistema Técnico). Las unidades en que se miden estas magnitudes no pueden elegirse arbitrariamente y deben estar en concordancia con las leyes que rigen la física.
Si bien existen varios sistemas de unidades, en el presente curso se utilizarán tanto el Sistema Internacional (SI) como el Sistema Técnico (ST) o Sistema Terrestre debido a que en muchos países aun es utilizado.
Con respecto al SI, este posee tres unidades fundamentales a saber: longitud, masa y tiempo. Se define al metro como la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299.792.458s.
El kilogramo se define como la masa de un cilindro fabricado con una aleación de platino e iridio que se conserva en la oficina internacional de pesos y medidas, en Svres, Francia.
Finalmente se define el segundo como el tiempo que requiere un átomo de cesio 133 para realizar 9.192.631.770 vibraciones correspondientes a la transición entre dos niveles hiperfinos de su estado fundamental.
La tabla muestra las unidades fundamentales del Sistema Internacional:

Sistema Internacional (SI)				
	Magnitud	Dimensión	Unidad	Símbolo
UNIDADES FUNDAMENTALES	*Longitud*	*L*	*metro*	*m*
	Masa	*M*	*kilogramo*	*kg*
	Tiempo	*T*	*segundo*	*s*

Para el Sistema Técnico en cambio, las magnitudes fundamentales son las que se indican en la siguiente tabla. En este sistema la unidad de fuerza es el kilogramo-fuerza o kilopondio, y no se utilizará en este curso.

Sistema Técnico (ST)				
	Magnitud	Dimensión	Unidad	Símbolo
UNIDADES FUNDAMENTALES	*Longitud*	*L*	*metro*	*m*
	Fuerza	*F*	*kilogramo fuerza*	*kgf*
	Tiempo	*T*	*segundo*	*s*

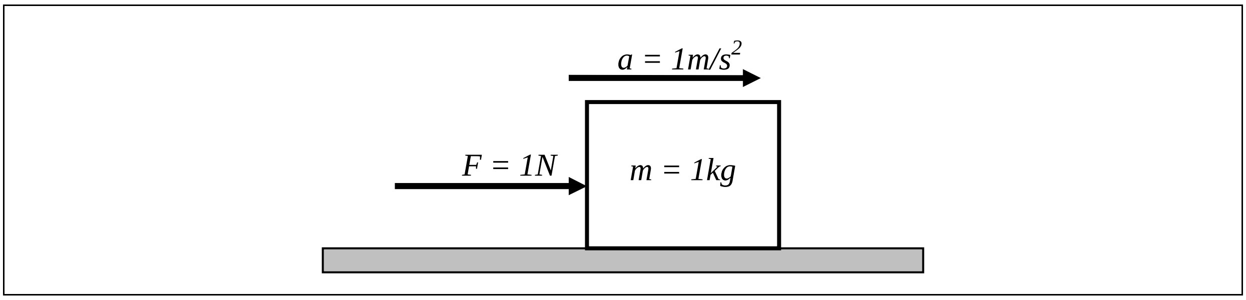
Para el SI, la fuerza posee una unidad derivada de las fundamentales que para determinarla se necesita conocer la 2º Ley de Newton[2] que establece:

$$F = m.a$$

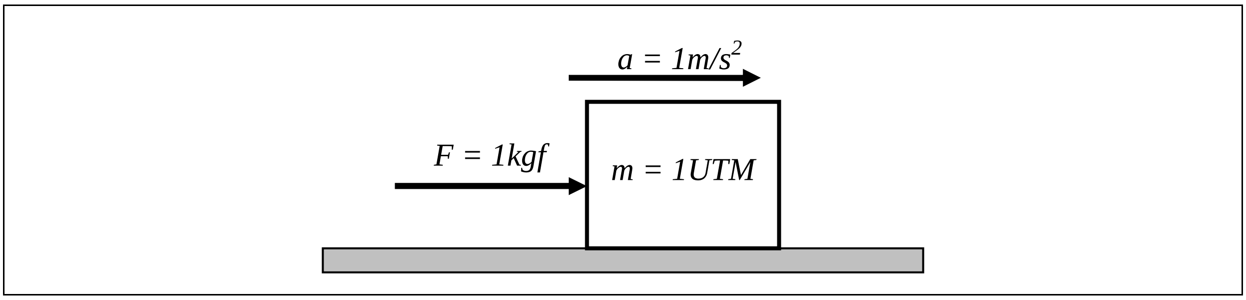
Siendo “m” la masa y “a” la aceleración con la que esta se mueve al aplicársele la fuerza.

[1] Magnitud es todo aquello que puede ser medido.
[2] Esta ley se estudiará detalladamente más adelante, por ahora solo es necesario conocer su expresión.

De acuerdo a ello, se define la unidad de fuerza de 1 Newton (1N) como aquella necesaria para otorgarle a la unidad de masa de 1kg, una aceleración de $1m/s^2$.



Del mismo modo, la Unidad Técnica de Masa (UTM) se define como aquella que, si se le aplica una fuerza de *1kgf*, se acelera con una aceleración de $1m/s^2$ de acuerdo a la 2º Ley de Newton.



Por lo tanto para determinar la equivalencia que existe entre las unidades de fuerza de los sistemas de unidades se procede de la siguiente manera:
En el SI se tiene:

$$1{,}0N = 1{,}0kg.1{,}0m/s^2$$

En el ST, la definición de fuerza es:

$$1{,}0kgf = 1{,}0kg.9{,}8m/s^2$$

Algebraicamente se pueden agrupar los valores numéricos por un lado y las unidades por el otro quedando:

$$1{,}0kgf = 9{,}8.kg.m/s^2$$

Finalmente la equivalencia entre unidades de fuerza entre los dos sistemas es:

$$1{,}0kgf = 9{,}8.N$$

O como factor de conversión:

$$1 = \frac{9{,}8.N}{1{,}0kgf}$$

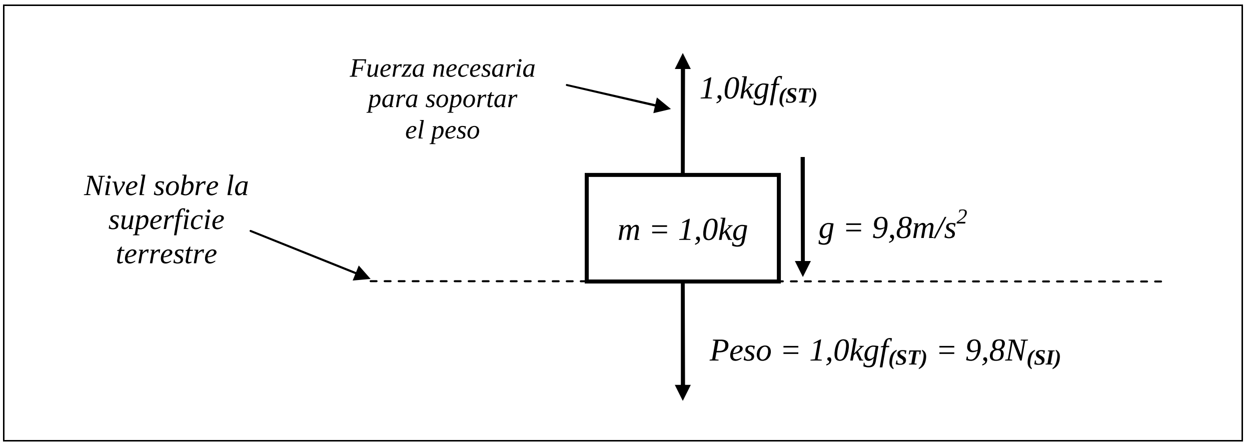
Para determinar la equivalencia entre UTM y kg se reemplaza el equivalente de la unidad de fuerza en la ecuación precedente quedando:

$$9{,}8kg.m/s^2 = 1{,}0UTM.1m/s^2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}0\ kg = \frac{1}{9{,}8}UTM$$

O como factor de conversión:

$$1 = \frac{1.UTM}{9{,}8kg}$$

Desgraciadamente la confusión entre peso y masa es muy común y para evitar confusiones cuando se utilice la palabra “kilogramos” se estará haciendo referencia a la masa de un cuerpo y cuando se hable de “peso” a la fuerza con que esa masa está siendo atraída por la gravedad.
Por lo tanto el peso de la masa patrón de *1kg* medida en el SI vale *9,8 N* y el siguiente esquema trata de aclarar esta diferencia.



Para mayor información en el ANEXO I se presenta una tabla de unidades de otras magnitudes utilizadas en Física.

CONVERSIÓN DE UNIDADES – FACTOR DE CONVERSIÓN

Para determinar la equivalencia entre diferentes unidades se aconseja utilizar factores de conversión para lo cual se desarrolla el siguiente ejemplo

Si se desea determinar a cuántos kilómetros por hora equivalen 35m/s, se procede de la siguiente manera:

$$35{,}0\frac{m}{s}\cdot\left(\frac{1{,}0km}{1.000{,}0m}\cdot\frac{60{,}0\,\text{min}}{1{,}0h}\cdot\frac{60{,}0s}{1{,}0\,\text{min}}\right)$$

Analizando el paréntesis, se puede observar tres factores, cada uno de ellos es equivalente a la unidad. Si se reagrupan los términos numéricos y los literales entre sí, queda:

$$35{,}0\cdot\left(\frac{1}{1.000{,}0}\cdot\frac{60{,}0}{1}\cdot\frac{60{,}0}{1}\right)\cdot\frac{m}{s}\cdot\frac{km}{m}\cdot\frac{\text{min}}{h}\cdot\frac{s}{\text{min}}$$

Realizando las operaciones numéricas y las simplificaciones de unidades se obtiene:

$$35{,}0\cdot(3{,}6)\cdot\frac{km}{h} = 126{,}0\frac{km}{h}$$

De esta manera se obtiene un factor de conversión que determina el equivalente en kilómetros por hora de la velocidad dada en metros por segundo con solo multiplicar esta última por 3,6. El factor de conversión será:

$$1 = \frac{3{,}6 km/h}{1{,}0 m/s}$$

ANÁLISIS DIMENSIONAL

La dimensión denota una cantidad que es independiente de las unidades que se utilicen para medirla. Si se mide en metros, pulgadas o millas, lo que se mide es una distancia, la dimensión es la longitud y la unidad de medida: metros, pulgadas o millas, según corresponda.
Algunas de las magnitudes que se derivan de las fundamentales se muestran a continuación.

Magnitud a medir	**Unidad de medida del SI**	**Símbolo de la unidad**	**Simbología de la dimensión**
Superficie	Metros cuadrados	m^2	$[L]^2$
Volumen	Metros cúbicos	m^3	$[L]^3$
Velocidad	Metros sobre segundo	m/s	[L] / [T]
Aceleración	Metros sobre segundo al cuadrado	m/s^2	$[M] / [L]^2$
Densidad	Kilogramos sobre metro cúbico	$kg./m^3$	$[M] / [L]^3$
Fuerza	Newton	N	$[M] .[L]/ [T]^2$

Realizar el análisis dimensional ayuda en muchos casos a comprobar si la expresión final a la que se arribó es consistente con la dimensión tratada, ya que en Física las cantidades se encuentran siempre relacionadas con las unidades en que se expresan. Por lo tanto las dimensiones pueden trabajarse como expresiones algebraicas.
Una de las leyes de la cinemática indica que el espacio recorrido por un cuerpo que cae debido a la atracción de la gravedad y despreciando el rozamiento del aire, cumple con la ecuación:

$$e = \frac{1}{2}.g.t^2$$

donde:
e → espacio recorrido
g → aceleración de la gravedad (g = 9,8m/s^2)
t → tiempo transcurrido medido en segundos.
Realizando un análisis dimensional se determina que la dimensión del espacio recorrido es consistente con las magnitudes intervinientes en la expresión analizada.

$$[L] = \frac{[L]}{[T]^2}.[T]^2 = [L]$$

También es útil para determinar las unidades de aquellas constantes que poseen dimensiones como la constante del resorte o la constante de gravitación universal "G" incluida en la expresión:

$$F = G.\frac{m_1.m_2}{d^2}$$

donde:
F→ fuerza de atracción gravitatoria
m_1 y m_2 → masas de cada partícula
G→ constante de gravitación universal
d → distancia de separación de cada partícula.
Para determinar las dimensiones de la constante G se la despeja de la expresión anterior quedando:

$$G = F.\frac{d^2}{m_1.m_2}$$

Cuyo análisis dimensional correspondiente es:

$$[G] = [M].\frac{[L]}{[T]^2}.\frac{[L]^2}{[M].[M]}$$
$$[G] = \frac{[L]^3}{[M][T]^2}$$

El valor de la constante G expresada en unidades del SI es $6{,}67.10^{-11}$ $m^3/kg.s^2$.

REGLAS DE REDONDEO

A fin de utilizar correctamente las cifras decimales, es necesario tener en cuenta algunas reglas que rigen el redondeo de números.
A continuación se presentan cuatro reglas que rigen el redondeo de cifras con un ejemplo ilustrativo.

1.Si el dígito a eliminar es > 5 el dígito que se mantiene se aumenta en uno. Por ejemplo si se debe redondear a dos decimales el número 325,176 el resultado debe informarse 325,18 ya que el dígito a eliminar 6 >5.

2.Si el dígito a eliminar es < 5 el dígito retenido se mantiene tal cual. Por ejemplo si se debe redondear a dos decimales el número 132,724 el resultado debe informarse 132,72 ya que el dígito a eliminar 4 <5.

3.Si el dígito a eliminar es 5 y el dígito retenido impar el retenido aumenta en uno. Por ejemplo si se debe redondear a dos decimales el número 155,175 el resultado debe informarse 155,18, ya que el dígito a retener es 7 y el que se debe eliminar es 5.

4.Si el dígito a eliminar es 5 y el retenido par, el retenido se mantiene. Redondeando a dos decimales el número 20,165 queda 20,16.

ORDEN DE MAGNITUD

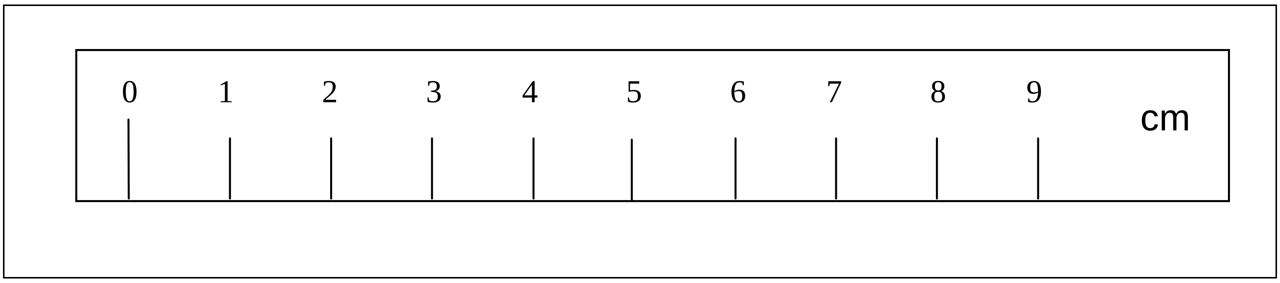
En los cálculos aproximados y en descripciones generales, como cuando decimos “la carga de ese camión pesa tantas toneladas”, se suele expresar la cantidad por su orden de magnitud, para lo cual se toma por redondeo la potencia de diez (o por la notación científica que es lo mismo) más próxima al número a estimar su orden de magnitud.
Por ejemplo, un peso de *13.250,3N* posee un orden de magnitud dado por la notación científica del número previamente redondeado, es decir $1{,}3 \,.\, 10^4$ tiene un orden de magnitud de 4.
Si el número fuera $17{,}6 \,.\, 10^7$, el orden de magnitud será $20 \,.\, 10^7 = 2 \,.\, 10^8$ y su orden de magnitud será 8.

Una longitud de $8\ .10^{-6}\ m$ decimos que es del orden de magnitud de $10^{-5}\ m$ dado que al redondear el 8 queda $10\ .10^{-6}$, dando como resultado $1\ .10^{-5}$ y su correspondiente orden de magnitud será entonces *-5*.
En la siguiente tabla se indican algunos ejemplos de cómo determinar el orden de magnitud:

Número	Redondeo	Notación científica	Orden de magnitud
0,0012	10×10^{-4}	1×10^{-3}	-3
0,0079	100×10^{-4}	1×10^{-2}	-2
950	1.000×10^{0}	1×10^{3}	3
26	1×10^{1}	1×10^{1}	1
$8,5 \times 10^{6}$	10×10^{6}	1×10^{7}	7
$9,52 \times 10^{-6}$	10×10^{-6}	1×10^{-5}	-5
$1.534,34 \times 10^{3}$	1.000×10^{3}	1×10^{6}	6
$14,56 \times 10^{-4}$	10×10^{-4}	1×10^{-3}	-3

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Se define como número de cifras significativas de una medición a todos los valores observados más uno apreciado, por lo tanto, si se informa que el resultado de la medición es 34,56m, la décima, la unidad y la decena son correctas pero la centena es incierta.
Si se tiene un instrumento de medida como el que se muestra a continuación con el cual de realizarán mediciones, los valores observados serán los centímetros y el apreciado será según la experiencia del operador[3], la décima de centímetro.



Los resultados de las mediciones de longitud que se realicen con este instrumento se informarán en unidades enteras en centímetros, que corresponde a las divisiones observadas, más la cifra apreciada en décimas de centímetro. Finalmente, el resultado numérico de la medición deberá contener una sola cifra decimal.
Cuando se realizan cambios de unidades, la manera más segura de presentar el guarismo sin cometer un error en la cantidad de cifras significativas es utilizar notación científica.
Por ejemplo, si se quiere expresar el valor 7,5cm en milímetros, el resultado del cambio de unidades quedará 75mm, manteniendo las cifras significativas. Pero si se quiere expresar en metros la expresión deberá presentar la misma cantidad de cifras significativas. Utilizando notación científica la expresión correcta quedará indicada como $7,5 \times 10^{-2}$ m.
En la siguiente tabla se indican algunos ejemplos de cómo determinar el número de cifras significativas:

[3] Se hace referencia a que algunas personas pueden “dividir” el espacio en blanco entre graduaciones y apreciar la medida en base a ello.

Número	Notación científica	Cifras significativas
0,0012	$1,2 \times 10^{-3}$	2
0,00079	$7,9 \times 10^{-4}$	2
0,001456	$14,56 \times 10^{-4}$	4
26	$2,6 \times 10^{1}$	2
952.000	$9,52 \times 10^{5}$	6
1.534.340	$1,53434 \times 10^{6}$	7
950	$9,50 \times 10^{2}$	3

Se debe observar que las potencias de diez de la notación científica no tienen absolutamente nada que ver con las cifras significativas.

OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Suma y Resta

El sumando que tenga menos decimales determinará la cantidad de decimales que tendrá el resultado final, en otras palabras la suma depende del sumando de menos decimales. Esta regla debe ser aplicada tanto para la suma como para la resta.

$$55{,}15 + 20{,}9367 = 55{,}15 + 20{,}94 = 76{,}09$$
$$72{,}13 - 17{,}03987 = 72{,}13 - 17{,}04 = 55{,}09$$

Multiplicación y División

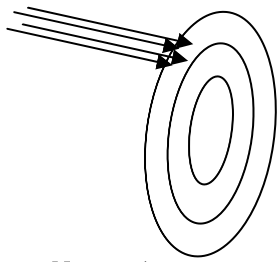
El número de cifras significativas en el resultado final es el mismo número de cifras significativas que la menos precisa, donde "menos precisa significa la que tiene el número menor de cifras significativas".

$$(1{,}10).(934{,}750) = 1.028{,}225 = 1{,}028225.10^{3} = 1{,}03.10^{3}$$
$$\frac{593{,}758}{70{,}3} = 8{,}446 = 8{,}4$$

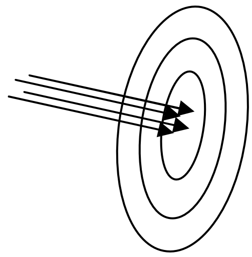
Otro procedimiento que dará el mismo resultado es el de trabajar con todas las cifras y al resultado de la operación se le aplica la regla de redondeo respetando aquella de menor cantidad de cifras decimales.

PRECISIÓN Y EXACTITUD

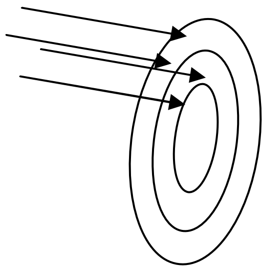
Con relación a los aparatos de medición es necesario definir dos conceptos totalmente diferentes a saber: la precisión y la exactitud.
La precisión está asociada a la mayor o menor dispersión que un instrumento o método puede detectar de una magnitud medida. Se encuentra asociada a la sensibilidad para detectar menores variaciones de la magnitud que se desea determinar. Por ejemplo un cronómetro cuya escala está graduada en 10ms es más preciso que un reloj común con segundero.
La exactitud de un instrumento o método está asociada a la calidad de la calibración del mismo.
Para ilustrar estos conceptos se muestra en la siguiente figura una serie de cuatro disparos indicando las características de cada uno de ellos:



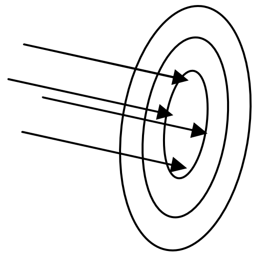
No son tiros exactos pero sí precisos, porque no dieron en el centro pero se encuentran agrupados.



Tiros exactos y precisos, porque dieron en el centro y además se encuentran agrupados.



Ni exactos ni precisos porque no dieron en el centro ni se encuentran agrupados.



Tiros exactos pero no precisos, porque dieron en el centro pero se encuentran dispersos.

MAGNITUD Y MEDIDA

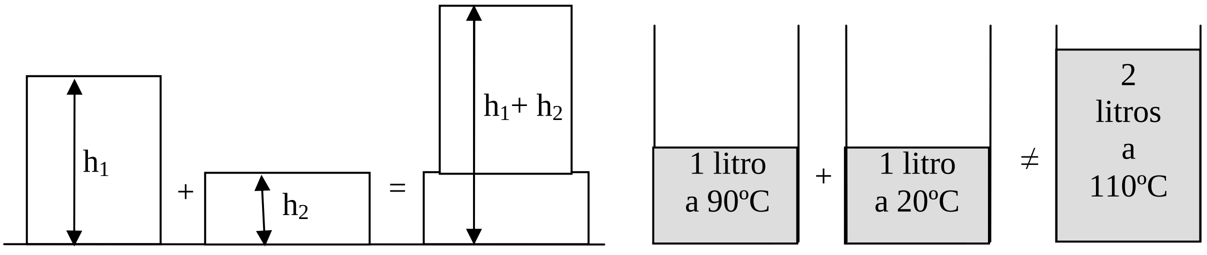
Si magnitud es todo aquello que puede ser medido, la medición es la técnica que se utiliza para determinar el valor de esa magnitud física mediante la comparación con otra definida como unidad patrón. Al medir una cantidad cualquiera determinamos la relación que existe entre la cantidad medida y la unidad elegida como patrón.
Se debe tener cuidado de no producir perturbaciones en el sistema en estudio, por ejemplo, no es lo mismo medir con un termómetro de mercurio la temperatura de un litro de agua que la de una gota, ya que en el primer caso la temperatura del litro de agua no experimentará variación apreciable al “calentar el termómetro” mientras que la gota de agua “se enfriará” al ponerse en contacto con una masa relativamente mucho mayor.
Una magnitud física es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o sustancia, susceptible de ser medido y al ser la Física una ciencia experimental, significa que los fenómenos bajo análisis deben observarse y medirse y todo lo que se diga respecto a ellos (o a sus consecuencias lógicas) carece de sentido si no se pueden comprobar experimentalmente.
Para determinar cualquier magnitud física es necesario seguir un proceso de medición que es fundamental para la Física. Este proceso es una operación experimental en la que intervienen necesariamente tres sistemas:

- ✓ Objeto cuya magnitud queremos determinar.
- ✓ Instrumento o aparato a utilizar.
- ✓ Unidad de medida

El proceso de medición de la longitud de un objeto consiste en:

- ✓ Hacer coincidir un extremo del objeto a medir con la primera división del instrumento, (el cero de la regla graduada).
- ✓ Determinar la cantidad de divisiones que existen hasta el otro extremo del objeto medido (número de unidades).
- ✓ Realizar el mismo procedimiento con el objeto que se definió como unidad de medida (calibración de la regla graduada con el patrón).

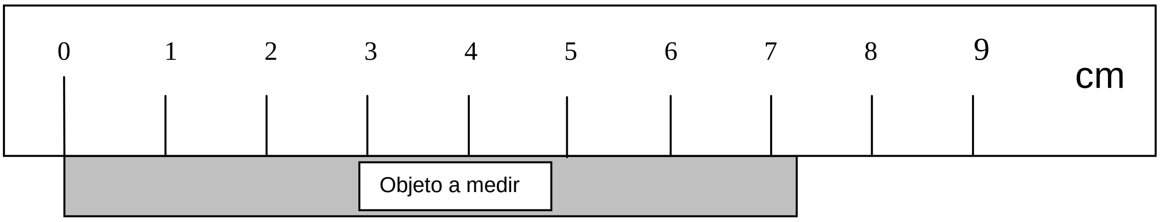
En definitiva el proceso de medición es el que define a la magnitud física del objeto y el resultado de este proceso en un número real que se llama valor de la magnitud en cuestión y representa el número de veces que la unidad está contenida en la magnitud medida.
Una magnitud física es genuina cuando el valor de la magnitud final coincide con la suma de cada una de las magnitudes originales, caso contrario se tiene una magnitud no genuina. En la figura se observan dos magnitudes, una genuina y la otra no genuina.



La longitud es una magnitud física genuina. La temperatura es una magnitud física no genuina.

MEDICIONES Y ERRORES EN LA MEDICIÓN

Si se desea determinar el valor de la longitud del objeto de la figura se compara este último con el instrumento de medida, que en este caso es una regla graduada en centímetros según se muestra.



Como resultado de la medición se obtienen dos valores extremos o cotas, uno máximo y otro mínimo. A estos números se los conoce como valores significativos o cifras significativas pudiendo ser expresados por medio de un intervalo de la siguiente manera:

$$(X \text{ min}; X \text{ max})$$

Dentro de este intervalo, denominado intervalo de indeterminación, se encuentra la verdadera longitud del objeto y esto nos dice que nunca se conocerá exactamente el valor real pero tal vez no sea necesario o no sea posible medirlo.
Este intervalo no expresa la medida buscada, pero se podría definir al valor medio[4] del intervalo como el valor que mejor representa la magnitud medida, es decir:

$$\overline{X} = \frac{X\min + X\max}{2}$$

Si tenemos que decir cual es el valor de la longitud buscada, el valor promedio es el que tiene más probabilidades de ser el correcto ya que, si optamos por el valor máximo y resulta que el valor verdadero coincide con el mínimo, el error que se cometerá será el mayor de todos y viceversa.
Aquí el significado de la palabra error en un sentido amplio, puede considerarse como una estimación o cuantificación de la incertidumbre[5] de una medida. Cuanto más incierta sea una medida, tanto mayor será el error que lleva aparejado.
Tomando como centro del intervalo al valor promedio, el valor verdadero se encontrará dentro de un intervalo cuyo radio estará dado por la expresión

$$\Delta X = \frac{X\max - X\min}{2}$$

Por lo tanto, se define como el resultado de la medición de la longitud del objeto como:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X$$

Para el caso de la medición del objeto del ejemplo de más arriba será:

$$\Delta X = \frac{8-7}{2} = 0{,}5cm$$
$$\overline{X} = \frac{8+7}{2} = 7{,}5cm$$
$$X = 7{,}5 \pm 0{,}5cm$$

Para tener una idea del grado de significación de la incertidumbre de la medición respecto al valor medido, se define el error relativo como el cociente:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{med}}$$

O en forma porcentual como:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\Delta x}{x_{med}}.100$$

Para ejemplificar el concepto supongamos que tenemos que determinar la distancia que existe entre dos esquinas de una cuadra de 100 metros y contamos para ello con dos tipos de instrumentos de medición, el “cuentakilómetros” de un automóvil (odómetro) y una regla de un

---
[4] Se utilizará generalmente la raya sobre una magnitud para simbolizar el valor medio de la misma.
[5] Según el diccionario se interpreta como la falta de conocimiento seguro y claro de algo, en este caso del verdadero valor de la medida del objeto.

metro sin graduaciones intermedias. Como el cuentakilómetros mide cada 100 metros el resultado de la medición con este "instrumento" será:

	Medida realizada con	
	Automóvil	Metro
Resultado de la medición	$L_A = (50 \pm 50)\ m$	$L_R = (99{,}5 \pm 0{,}5)\ m$
Error absoluto	*50m*	*0,5m*
Error relativo	$\varepsilon_A = \frac{50}{50} = 1$	$\varepsilon_A = \frac{0{,}5}{99{,}5} = 0{,}005$
Error relativo porcentual	$\varepsilon_A = \frac{50}{50} = 100\%$	$\varepsilon_A = \frac{0{,}5}{99{,}5} = 0{,}5\%$

El error relativo (o relativo porcentual) es más descriptivo que el error absoluto cometido en cuanto a la calidad de la medición.

Para pensar
¿Qué pasaría si la única medición realizada con la regla utilizada en las mediciones anteriores cae "justo" en, por ejemplo, 7cm? ¿Se cometería algún tipo de error? ¿Cuál será la expresión del resultado de la medición?

ERRORES ESTADÍSTICOS

Si un operario realiza la medición de un objeto una única vez, el valor que se obtiene es, por supuesto el mejor valor y la incertidumbre estará asociada con los siguientes factores:

- ✓ Incertidumbre nominal que presenta el instrumento utilizado. Por ejemplo, si se utiliza una regla graduada en milímetros para medir una longitud, la incertidumbre asociada será de $\pm$0,5mm.
- ✓ Metodología de la medición. Por ejemplo, al medir la temperatura de un objeto con un termómetro de mercurio al ponerse en contacto ambos cuerpos el termómetro, si inicialmente se encuentra a menor temperatura, elevará su temperatura mientras que la del objeto descenderá impidiendo obtener la temperatura inicial deseada.

Supongamos ahora que un operario debe realizar N mediciones del mismo objeto, no necesariamente resultarán todas exactamente iguales, ya que aparecerán fluctuaciones del instrumento (por calentamiento u otros motivos), el objeto puede modificarse por el proceso de medición en sí.
Por todo lo dicho al realizar N mediciones se obtendrán resultados tales como:

$$X_1; X_2 ... + X_N$$

Como es lógico, el objeto medido posee solo un valor numérico real y como resultado de las mediciones realizadas, probablemente ninguno de los N resultados obtenidos coincida con ella pero entonces, ¿cómo se puede determinar el resultado final de la medición basándose en todos los resultados obtenidos?

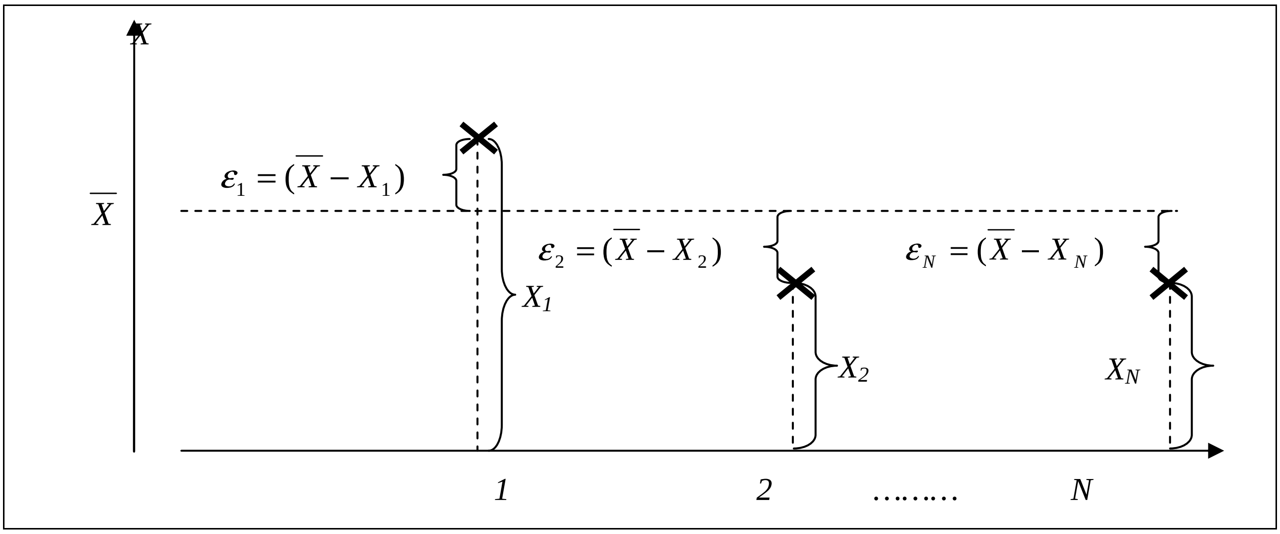
Por el momento se adopta como el valor más representativo al valor medio (o promedio) de los *N* valores medidos dados por la expresión:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_1^N Xi}{N}$$

Cada uno de los valores obtenidos individualmente podrá discrepar (en más o en menos) respecto del valor promedio siendo esas diferencias representadas por la expresión:

$$\varepsilon_i = (\overline{X} - X_i)$$

Estas diferencias se denominarán "desviación de cada medición" respecto del promedio y gráficamente se muestran en la figura siguiente:



Para cada una de las *N* mediciones obtenidas se puede observar que las desviaciones pueden ser tanto por exceso (medición *1*) como por defecto (mediciones *2 y N*).
Si se realiza el promedio de todas las desviaciones obtenidas, se puede obtener un valor positivo, negativo o incluso cero y no tendrá mucho significado físico.
Si por el contrario se eleva al cuadrado cada una de las desviaciones cuadráticas, se logra tener todas las desviaciones positivas y la suma de las mismas dará una idea de la fluctuación de los valores medidos respecto del valor promedio.
Es evidente que cuantas más mediciones se realizan, mayor será el resultado de la suma de las desviaciones cuadráticas y para independizarse del número de mediciones se promedian estas a fin de tener una idea más correcta del grado de dispersión de los datos. Esta expresión se define como varianza[6] y su expresión es:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}$$

Como puede observarse, las unidades de la varianza para la medición de una longitud son unidades cuadradas. Si se mide en cm, la varianza se expresará en cm^2.

[6] Matemáticamente se define a la varianza como el promedio de las (*N-1*) mediciones, pero como en los experimentos de física *N>>1*, el resultado aceptable.

Finalmente y con el objeto de tener las mismas dimensiones que la magnitud medida, se define la dispersión o error estándar o error cuadrático medio de cada medición respecto del promedio a la raíz cuadrada de la varianza, dada por la expresión:

$$S = \sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}{N}}$$

Como se observa, S[7] posee las mismas unidades de la magnitud medida X y para determinar la calidad de la medición se la puede comparar mediante el cociente:

$$\frac{S}{\overline{X}}$$

Ahora se analizará el caso en que se realicen varias series de mediciones de una misma magnitud. Si se obtiene el correspondiente promedio de cada una de las series, es de esperar que cada uno de ellos, tomados como datos individuales, también presente fluctuaciones, pero con una menor dispersión respecto a la que presentan los datos individuales dentro da cada serie.
Puede demostrarse que, a medida que se aumenta el número de mediciones, la distribución de los promedios de cada serie presentará una distribución normal[8] con una desviación dada por:

$$\sigma_{est} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{N^2}}$$

Esta expresión se conoce como desviación estándar del promedio y en un experimento es la medida de la incertidumbre estadística asociada al valor medio en el proceso de realizar la medición de una magnitud N veces.
Finalmente, el resultado de una serie de mediciones se indica como:

$$X = \overline{X} \pm \sigma_{est}$$

El problema siguiente ejemplifica la utilización de los conceptos dados y la forma de presentarlos para su mejor interpretación.
Para un estudio de la salud de la población infantil de un barrio, se consultaron los pesos de cincuenta niños dando por resultado los siguientes valores:

41	40	41	41	42	43	40	40	41	42
38	41	36	39	37	41	40	39	38	40
39	42	40	40	40	46	42	43	40	44
41	44	40	45	43	38	39	41	41	39
42	38	38	39	39	42	43	44	42	37

Se pide realizar un gráfico de barras con los valores relevados y determinar el promedio, el rango de variación de los pesos y el desvío estándar.

[7] Se resalta la diferencia en la simbología utilizada en estadística, utilizando S para el caso redeterminar la dispersión de una muestra. Si se midieran *todos* los datos de la población, se tendría la dispersión total definida con σ.
[8] La distribución normal, también denominada distribución de Gauss tiene forma de campana y se estudia con más detalle en los cursos de estadística. Además se puede suponer que la muestra y la población presentan en este tipo de distribución la misma dispersión.

Con los *N=100* valores obtenidos se determina el valor promedio de acuerdo a la expresión:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{N}$$

Para este caso el peso promedio resulta: *Pmed = 40,62kg.*

Con los valores máximo y mínimo se obtiene el rango *R* de variación de los valores mediante:

$$R = X\ máx - X\ \min$$

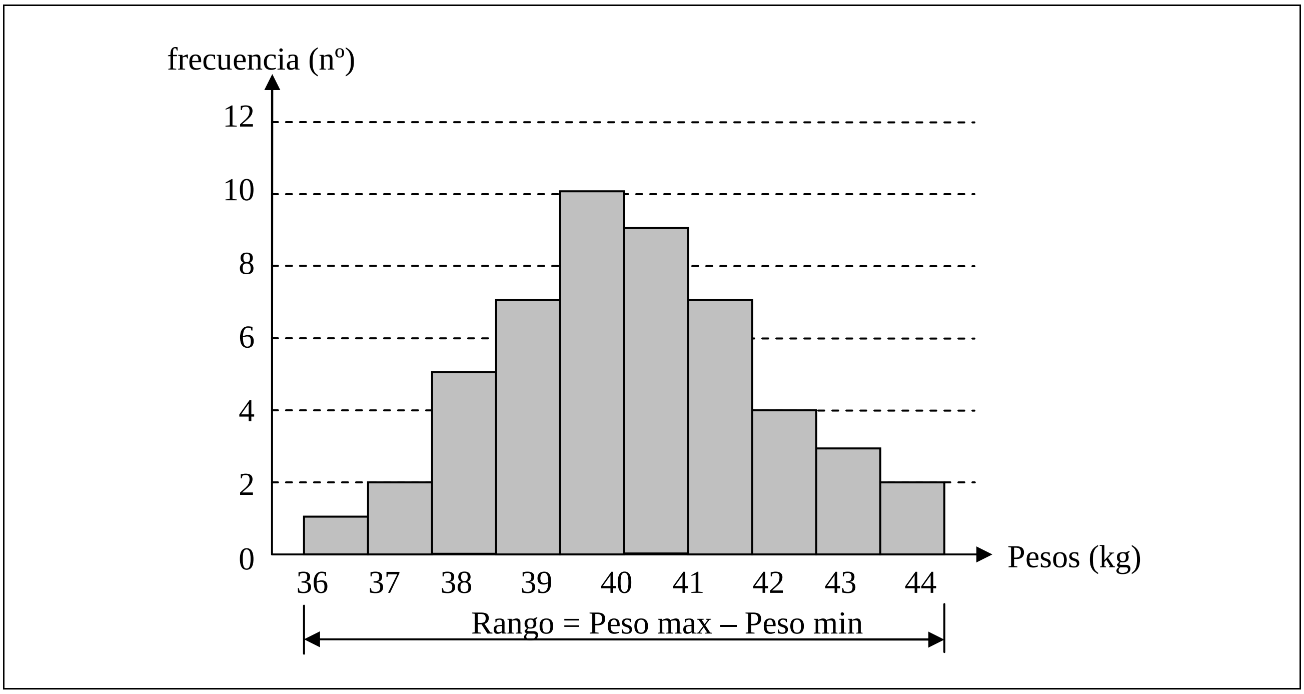
En este caso el valor resulta R = 10kg
Dependiendo de la cantidad de mediciones realizadas, se generan intervalos iguales dados por:

$$\Delta X = \frac{R}{n}$$

Aquí, n representa la cantidad de intervalos en la que se desea dividir el rango.
Si se desean 10 intervalos para realizar la gráfica se tendrá como amplitud de cada intervalo 1kg generándose así 10 intervalos que comenzarán con *[Xmin; Xmin+ΔX),* hasta terminar con el último intervalo dado por *[ΔX; Xmax]*.
Se hace notar que los intervalos poseen un extremo cerrado y el otro abierto para que el intervalo siguiente comience tomando el valor "dejado" por el anterior permitiendo así la inclusión de todos los valores.
La siguiente tabla presenta los intervalos y la cantidad de datos que este involucra, denominada frecuencia.

Intervalo	frecuencia
[36; 37)	1
[37; 38)	2
[38; 39)	5
[39; 40)	7
[40; 41)	10
[41; 42)	9
[42; 43)	7
[43; 44)	4
[44; 45)	3
[45; 46)	2

El gráfico de la frecuencia en función de los intervalos de valores presentados en la tabla se denomina histograma, que se muestra a continuación:



Para calcular la varianza se promedian las desviaciones cuadráticas respecto del valor medio hallado. Los resultados se presentan en la siguiente tabla

Pi	*Pmed*	*Pmed - Pi*	*(Pmed - Pi)^2*	*frecuencia*	*(Pmed - Pi)^2 · frec*
36	40,62	4,62	21,34	1	21,34
37	40,62	3,62	13,10	2	26,21
38	40,62	2,62	6,86	5	34,32
39	40,62	1,62	2,62	7	18,37
40	40,62	0,62	0,38	10	3,84
41	40,62	-0,38	0,14	9	1,30
42	40,62	-1,38	1,90	7	13,33
43	40,62	-2,38	5,66	4	22,66
44	40,62	-3,38	11,42	3	34,27
45	40,62	-4,38	19,18	1	19,18
46	40,62	-5,38	28,94	1	28,94
				Suma total	223,78 kg^2
				Varianza	4,48 kg^2
				Desviación estándar σ	2,12 kg

DISTRUBUCIÓN DE GAUSS

Para los casos de errores casuales en la toma de un gran número de datos estadísticos, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua cuya forma es similar a una campana (de allí el nombre de campana de Gauss) dada por la expresión:

$$\Delta n \cong \frac{N}{\sigma\sqrt{2.\pi}}\, e^{\frac{(\bar{X}-x)^2}{2.\sigma^2}} .\Delta x$$

Siendo:

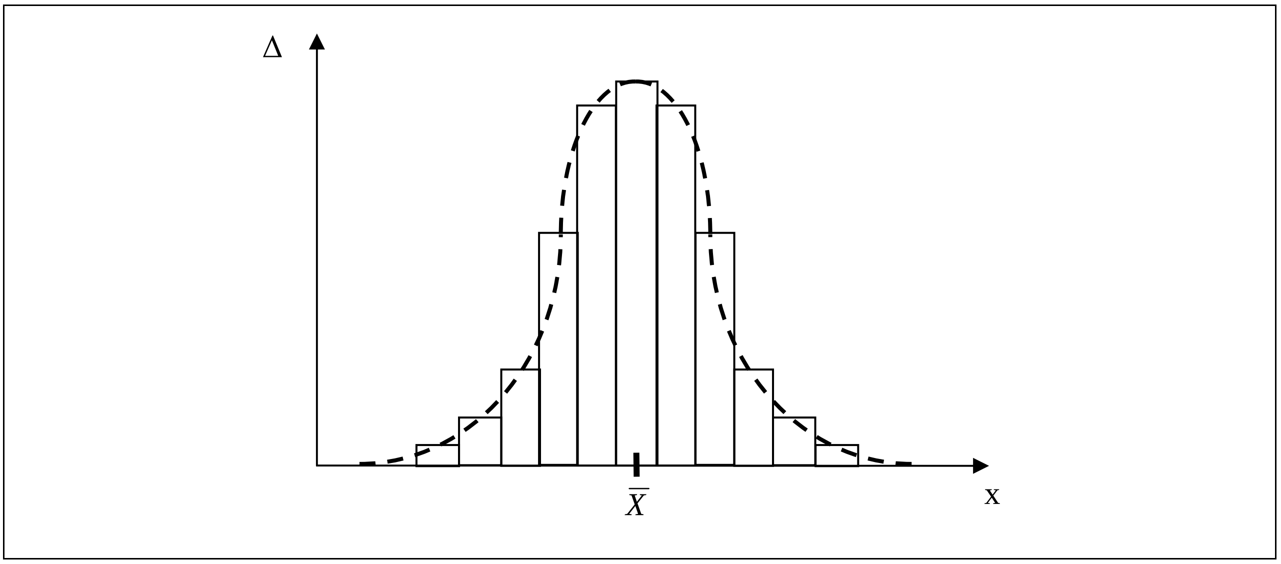
Δn → frecuencia de datos.

N → número de datos.

$\bar{X}$ → valor medio.

x → intervalo.
σ → desviación estándar.

El histograma que se obtiene de realizar el procedimiento descrito en el ejemplo anterior, está indicado por el diagrama de barras que se muestra a continuación.



La línea de puntos es una campana de Gauss, ya mencionada, donde se puede apreciar la ubicación del promedio de los valores, que coincide con el valor máximo de la curva.
El intervalo definido por $\overline{X} \pm \sigma$, o expresado como intervalo ($\overline{X} - \sigma$; $\overline{X} \pm \sigma$) se interpreta como aquel en el cual existe la probabilidad de hallar el 68% de los valores totales.
De igual manera, existe la probabilidad de un 95,4% que los valores medidos caigan dentro del intervalo definido por ($\overline{X} - 2\sigma$; $\overline{X} \pm 2\sigma$).
Finalmente, con una probabilidad de un 99,9%, los datos se ubicarán dentro del intervalo definido por 3σ, es decir por el intervalo ($\overline{X} - 3\sigma$; $\overline{X} \pm 3\sigma$).

NÚMERO ÓPTIMO DE MEDICIONES

Recordando que *S* mide la dispersión promedio de cada medición de la muestra y que no depende del número de mediciones sino de la calidad de las mismas y que σ sí depende del número de mediciones resultando menor cuanto más mediciones se realicen.
Por lo tanto, parecería que cuantas más mediciones se realicen, menor será la incidencia del error estadístico en el resultado final de la medición.
Desde el punto de vista físico, no tiene sentido reducirlo hasta valores menores que el determinado por el instrumento y el método de medición.
Para realizar la determinación del número óptimo de mediciones de una magnitud y dejando la demostración correspondiente para los cursos de estadística, se utiliza la expresión:

$$N_{OP} \approx 1 + \left(\frac{S}{\sigma} \right)^2$$

El protocolo de la medición es el siguiente:
1) Se realizan no más de diez mediciones preliminares y se determina *S*.
2) Se estima la incertidumbre nominal σ.

3) Se determina el número óptimo de mediciones. Si este resulta menor a los realizados se continúan las mediciones hasta el valor obtenido, caso contrario se utilizan las realizadas.
4) Se calcula el promedio de las mediciones y la incertidumbre.
5) Se evalúa la incertidumbre absoluta ΔX combinando todas las incertidumbres involucradas.
6) Se expresa el resultado de la medición como $X = \overline{X} \pm \Delta X$. Puede agregarse la incertidumbre relativa para tener una idea de la calidad de la medición.

COMPARACIÓN DE MEDIDAS

El objetivo final de una medición es compararla con otra medición para reconocer si son iguales o diferentes. Si la medición de una magnitud produjera un número, tal como los empleados en la aritmética, la comparación sería trivial como en el caso de comparar la cantidad de estudiantes de dos aulas diferentes. Pero la medida de una magnitud física produce dos números como cota de un intervalo y, más grave aún, puede, debido a las fluctuaciones, generar dos intervalos diferentes para la misma magnitud. De ahí que la cuestión de igualdad o desigualdad de medidas sea un problema que no pueda resolverse tan fácilmente.
Un criterio que se aplica frecuentemente para determinar si la discrepancia entre dos medidas que presentan una distribución normal es significativa o no, es el siguiente:
Dadas dos mediciones realizadas independientemente tales como:

$$X_1 = \overline{X}_1 \pm \Delta X_1$$
$$X_2 = \overline{X}_2 \pm \Delta X_2$$

Se define:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_1^{\,2} + \Delta X_2^{\,2}}$$

Se acordará que con un 68% de certeza que las mediciones son diferentes si se cumple que

$$\left| X_1 - X_2 \right| \geq \Delta X$$

Y con un 96% de certeza si se cumple que:

$$\left| X_1 - X_2 \right| \geq 2\Delta X$$

Por ejemplo, se desea determinar si los resultados obtenidos al medir una longitud por dos operarios son diferentes o no. Los valores informados por ambos operarios son:

$$L_1 = (9{,}82 \pm 0{,}03)\ \ m \qquad\qquad L_2 = (9{,}80 \pm 0{,}03)\ \ m$$

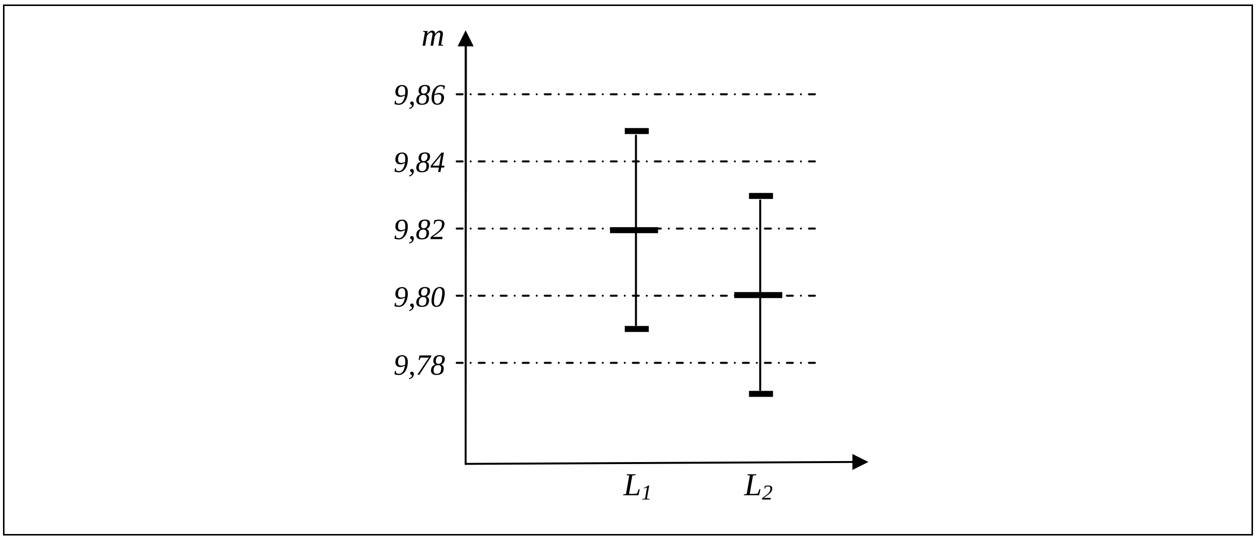
Utilizando las expresiones anteriores se tiene:

$$\Delta X = 0{,}04m$$

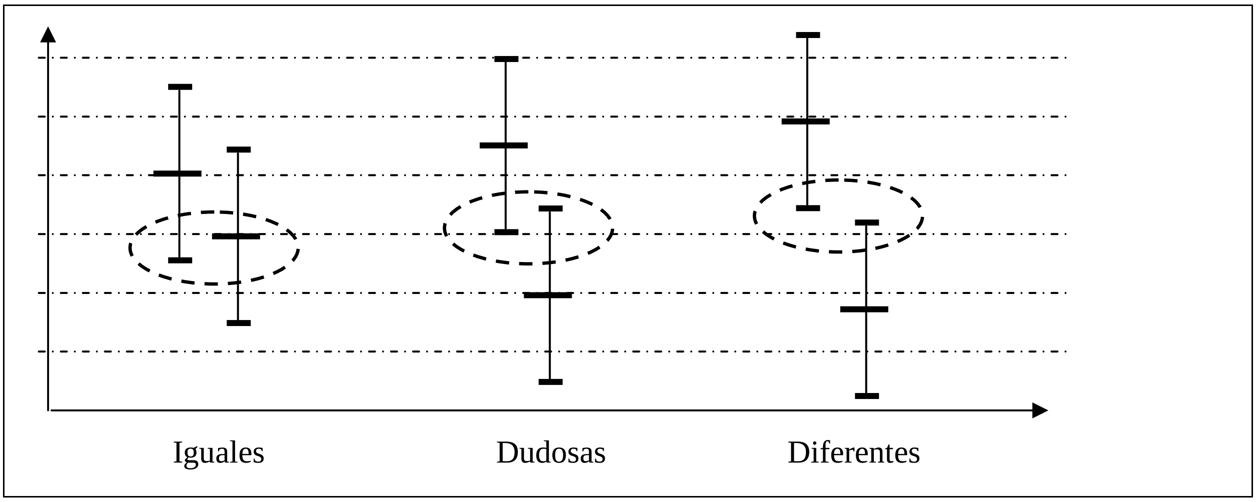
Con una certeza del 68% se puede afirmar que las mediciones son iguales ya que:

$$\left| 9{,}82 - 9{,}80 \right| < 0{,}04\, m$$

Si se grafican los valores obtenidos de cada medición se observa que los valores medios en cada una de las mediciones caen dentro de los intervalos de indeterminación del otro. Cuando esto ocurre se aceptan como iguales ambas mediciones:



En la figura se muestran las tres posibles alternativas al comparar dos mediciones. Para ello se resalta mediante líneas de puntos los solapamientos que determinan los motivos por los cuales se pueden diferenciar dos mediciones. En el caso dudoso, si se necesita determinar si son iguales o diferentes, se deberá mejorar el proceso de medición disminuyendo el ancho del intervalo y así tomar una decisión al respecto.



MEDICIONES INDIRECTAS Y PROPAGACIÓN DE ERRORES

Existen diferentes métodos de medición y los ejemplos hasta aquí desarrollados se remitieron a la medición directa. Si por el contrario se desea determinar el área de una superficie rectangular se deben realizar dos mediciones en forma directa (el ancho "*a*" y el largo "*b*") para luego multiplicar ambos valores y obtener el valor buscado de la superficie.
Los resultados de cada medición están dados por:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a$$

$$b = \bar{b} \pm \Delta b$$

De las expresiones anteriores se pueden determinar cuatro combinaciones mostradas a continuación:

Área	**Ancho**	**Largo**
Área 1 (valor máximo)	$a = \bar{a} + \Delta a$	$b = \bar{b} + \Delta b$
Área 2 (valor intermedio)	$a = \bar{a} + \Delta a$	$b = \bar{b} - \Delta b$
Área 3 (valor intermedio)	$a = \bar{a} - \Delta a$	$b = \bar{b} + \Delta b$
Área 4 (valor mínimo)	$a = \bar{a} - \Delta a$	$b = \bar{b} - \Delta b$

Es obvio que para determinar el intervalo de indeterminación se deberán utilizar las dos alternativas extremas dadas por:

$$A\max = (\bar{a} + \Delta a).(\bar{b} + \Delta b) = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.\Delta b + \bar{b}.\Delta a + \Delta a.\Delta b$$
$$A\min = (\bar{a} - \Delta a).(\bar{b} - \Delta b) = \bar{a}.\bar{b} - \bar{a}.\Delta b - \bar{b}.\Delta a + \Delta a.\Delta b$$

El valor medio del área será:

$$\bar{A} = \frac{A\max + A\min}{2} = \bar{a}.\bar{b} + \Delta a.\Delta b$$

Debido a que Δa y Δb normalmente son valores pequeños y además el producto de dos números pequeños entre sí, da como resultado uno más pequeño aun, es que se puede despreciar este factor quedando la expresión del valor medio del área como:

$$\bar{A} = \bar{a}.\bar{b}$$

Para obtener el valor de ΔA se realiza la semidiferencia entre los valores máximos y mínimos del área quedando:

$$\Delta A = \bar{a}.\Delta b + \bar{b}.\Delta a$$

Utilizando las expresiones anteriores, el error relativo cometido en la obtención del área quedará como:

$$\varepsilon A = \frac{\Delta A}{\bar{A}} = \frac{\bar{a}.\Delta b + \bar{b}.\Delta a}{\bar{a}.\bar{b}} = \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta a}{\bar{a}} = \varepsilon b + \varepsilon a$$

Lo cual indica que al multiplicar las dos longitudes para obtener el área, el error relativo de esta se propaga como la suma de los errores relativos de cada una de las magnitudes medidas directamente.
Finalmente, el error absoluto del área es:

$$\Delta A = A \cdot \varepsilon A$$

El resultado de la medición del área estará dado por:

$$A = \bar{A} \pm \Delta A$$

La generalización de la propagación del error se obtiene utilizando derivadas, herramienta matemática que se estudiará con más detalle en los cursos de cálculo[9] pero para este curso de física se presentarán las fórmulas sin su demostración para determinar las propagaciones de errores.
Para entender la nomenclatura, las variables *X* e *Y* se miden directamente dando lugar a la magnitud *Z* en forma indirecta.
La primera columna indica la operación que se debe realizar entre las mediciones directas para obtener la medida en forma indirecta de la magnitud deseada. La segunda columna indica los correspondientes valores medios de cada medida y finalmente la expresión del error relativo de la medición indirecta.

Medición indirecta	**Valor medio**	**Propagación del error**
$Z = X + Y$	$\overline{Z} = \overline{X} + .\overline{Y}$	$\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$
$Z = X - Y$	$\overline{Z} = \overline{X} - .\overline{Y}$	$\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$
$Z = X \,.\, Y$	$\overline{Z} = \overline{X}.\overline{Y}$	$\varepsilon Z = \varepsilon X + \varepsilon Y$
$Z = X / Y$	$\overline{Z} = \overline{X} / \overline{Y}$	$\varepsilon Z = \varepsilon X + \varepsilon Y$
$Z = X^n \,.\, Y^m$	$\overline{Z} = \overline{X}^n . \overline{Y}^m$	$\varepsilon Z = n.\varepsilon X + m.\varepsilon Y$

Para pensar

Se informa que el peso específico[10] de un cuerpo es *Pe = (0,98±0,1)kg/m*^{3}. Las mediciones realizadas para su determinación fueron: Peso *(5,75 ± 0,5) kg* y Volumen *(5,84 ± 0,05) m*^{3}. Comprobar si el valor informado es correcto justificando la respuesta.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Cuando se lleva a cabo un experimento de Física, lo que se pretende determinar es si existe una relación entre las variables analizadas, para lo cual se presentan y analizan los resultados presentándolos en forma gráfica. Esto permite una rápida visualización respecto del comportamiento del fenómeno.
Si se desea conocer cómo responde la variable *Y* cuando se modifica la variable *X*, la representación gráfica se presenta como la más adecuada.
Por ejemplo, si se desea conocer la relación que existe entre el esfuerzo aplicado a un resorte y el estiramiento del mismo, se confecciona un gráfico donde se define a la variable *X* como la longitud de estiramiento y la fuerza que se debe realizar para deformarlo como la variable *Y*.
En otros casos interesa estudiar si entre dos variables existe una correlación y de ser así, qué tan interrelacionadas está una con otra. Por ejemplo, la velocidad máxima de una bicicleta y el rodado de la misma.
Para confeccionar un gráfico adecuado es necesario determinar las variables correctas como así también la escala para representarlas.

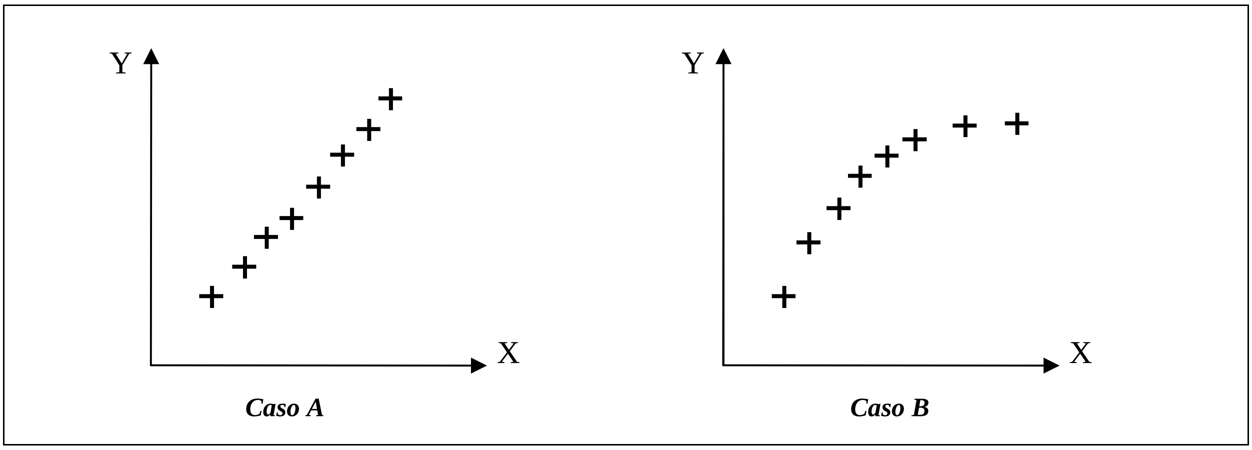
Comportamiento Lineal

El comportamiento de los fenómenos físicos responde a diversas leyes de los cuales el estiramiento de un tipo de resorte al aplicársele una fuerza en sus extremos responde a una relación lineal dada por la expresión:

[9] Para determinar errores relativos se puede utilizar el concepto de diferenciales.
[10] Se define peso específico a la relación entre el peso *P* de un cuerpo y su volumen *V* dado por la expresión *Pe = P/V*.

$$Y = mX + b$$

Siendo X la deformación, Y el esfuerzo realizado, m y b parámetros a determinar que dependerán del material con qué está compuesto, su longitud, etc.
Las deformaciones impuestas y los esfuerzos correspondientes se medirán con sus correspondientes incertidumbres por lo que el gráfico que resulte, no necesariamente presentará todos los valores alineados sobre una recta tal como se indica en el caso A de la figura.



Para el cálculo de los parámetros m (pendiente) y b (ordenada al origen) existen criterios refinados como el de los cuadrados mínimos cuyas expresiones se estudiarán más adelante con mucho mayor detenimiento. Para el presente curso de Física el criterio gráfico es el que se utilizará para determinar la expresión de la recta que mejor represente el comportamiento del fenómeno analizado.
A continuación, se presentarán algunas reglas prácticas para determinar la recta que mejor ajuste a la serie de datos relevados.
Con respecto a la ordenada al origen de la recta buscada, se pueden presentar dos casos:

1. Que pase por el origen de coordenadas. En este caso se utilizará este como pívot hasta obtener la recta que mejor ajuste.
2. Que no pase por el origen. En este caso se utiliza como pívot el punto cuyas coordenadas correspondan respectivamente a los promedios de los valores de X e Y.

Obtenida la recta se mide directamente los valores de los parámetros m y b teniendo presente la escala de dibujo. Este punto es importante porque diferentes escalas de los ejes cartesianos producen una deformación de la recta y la medición de la pendiente, directamente del dibujo, no corresponderá a la del fenómeno analizado.

Comportamiento Exponencial

Si al medir los valores de respuesta de un cierto experimento de laboratorio que sabemos responde a una ley del tipo:

$$Y = a.X^{b}$$

con a y b constantes siendo este comportamiento muy común en las ciencias, por ejemplo el espacio recorrido con un movimiento uniformemente acelerado.
El significado físico de la constante a es el de corresponder al valor de la variable Y para el caso de que la variable independiente X valga la unidad.
A la constante b se la denomina “exponente de escala” ya que si se multiplica a X por un factor k, la variable Y cambiará k^b veces.

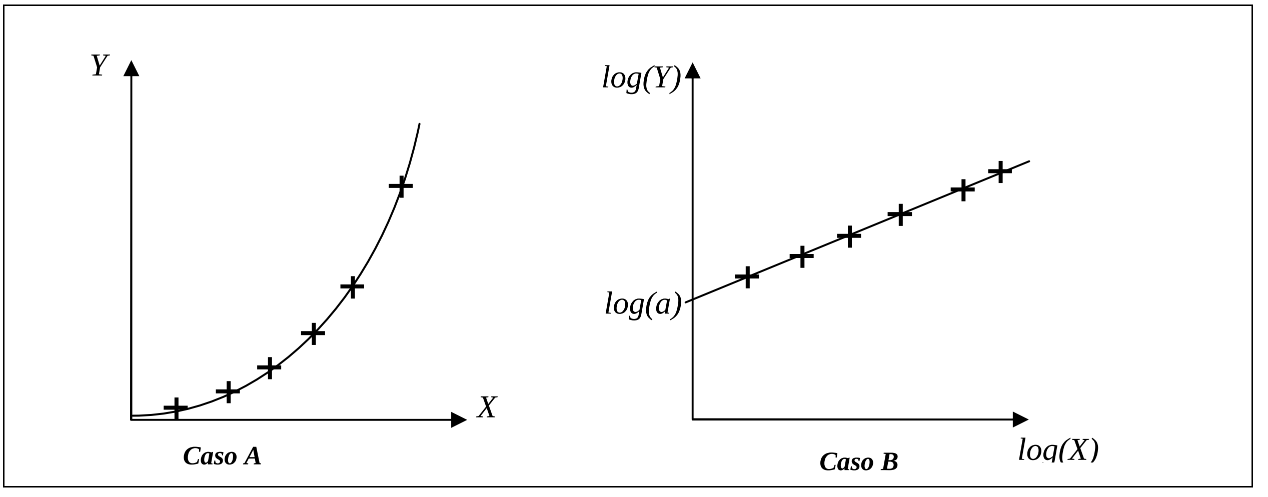
En principio siempre es más cómodo trabajar con expresiones lineales que exponenciales y una manera de transformar estas últimas es utilizar logaritmos para "rectificar" las funciones potenciales.
Si se aplica el logaritmo a ambos miembros de la expresión:

$$Y = a.X^{b}$$

queda:

$$\log Y = \log\left(a.X^{b}\right)$$
$$\log Y = \log a + b.\log X$$

Si a los ejes cartesianos "*x*" e "*y*" los denominamos respectivamente "*log(X)*" y "*log(Y)*", se tiene la representación de una recta según se observa en el caso B de la figura.



LEY DE VARIACIÓN DE DOS MAGNITUDES

En los párrafos anteriores fueron examinados dos problemas básicos de la Física experimental:

- ✓ cómo obtener el intervalo representativo de una magnitud física,
- ✓ cómo decidir, dados los intervalos correspondientes a dos medidas, si corresponden a magnitudes iguales o no.

A continuación se explorará la posible relación funcional entre dos magnitudes físicas utilizando para ello un ejemplo concreto: considerar la posible relación funcional entre la velocidad de un automóvil y el consumo de combustible. Se definirán las siguientes magnitudes físicas:

$X \rightarrow$ velocidad del automóvil.
$Y \rightarrow$ consumo de combustible.

Se puede presumir que el consumo de nafta es diferente si también lo es la velocidad del vehículo. Esto significa que podría aceptarse como hipótesis inicial la existencia de una relación funcional entre ambas variables:

$$Y = f(X)$$

Se plantean aquí varias preguntas:

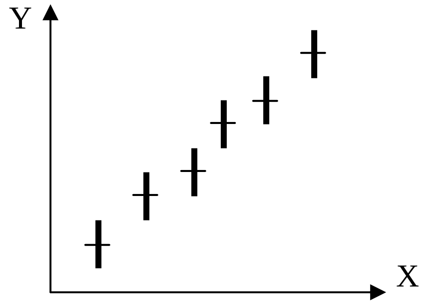
- ✓ ¿qué tipo de función podría ser?
- ✓ Propuesta una función, ¿cuál de las de su clase es la que mejor se ajusta a los hechos observados?

- ✓ Planteada la hipótesis de un tipo de función y obtenida la mejor de ellas, ¿con qué criterio se ha de aceptar o rechazar la hipótesis de la real existencia de esa función?
- ✓ En caso de aceptarse la hipótesis, ¿qué grado de confianza puede tenerse en el valor de los parámetros de dicha función y en las interpolaciones y extrapolaciones que podrían hacerse con ella?

Para evitar opiniones subjetivas y justificarlas con argumentos no fáciles de desechar se realizará un análisis inteligente de las observaciones, que provenga del "exterior del investigador" como punto de vista objetivo y no de su "interior". A esto se lo denomina una "respuesta experimental" y las preguntas formuladas más arriba no pueden abordarse mediante recursos matemáticos en los que es recomendable mantener estas notas. Sin embargo, será imprescindible abordar el problema aunque sea con un tratamiento cuasi intuitivo.
El método consiste en seguir los cuatro pasos siguientes:

1. Toma de datos

Se comienza con una consulta netamente experimental realizando las mediciones del consumo de combustible (Y) a diferentes velocidades (X).
Se supone que el error experimental en la determinación de la velocidad es muy pequeño para ser representado en el gráfico respecto a los del consumo de combustible.
El error de fluctuación en la medida de Y no se conoce porque se realiza una sola medición, aceptándose que las mismas son iguales para todas las Y_i medidas. El conjunto de puntos se llama "nube de puntos" o "diagrama de dispersión" según se muestra:



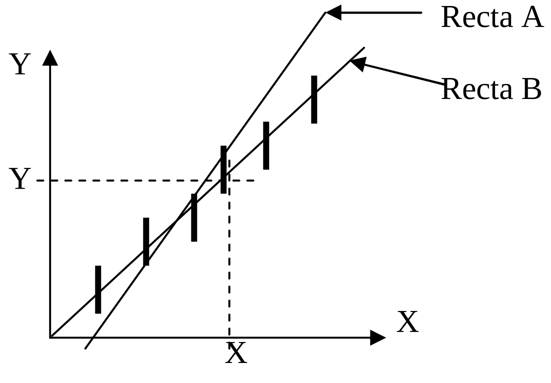
2. Formulación de la hipótesis

Se aventura una presunción acerca del tipo de función que podría vincular ambas variables. La gráfica obtenida parece adaptarse bien a una recta por lo que la presunción más sencilla de la relación funcional sería:

$$Y = mX + b$$

3. Ajuste de la función de los resultados experimentales

Aceptada la hipótesis de trabajo (hipótesis heurística) se parte de ella para encontrar la recta que mejor se ajusta a los resultados experimentales.
Es indudable que el sentido común lleva a rechazar la recta A frente a la recta B, ya que esta se "acomoda" mucho mejor a los resultados experimentales. Para muchas experiencias sencillas, este método de aproximar la recta es suficiente, ya que cualquier estimación es mejor que nada.
El cálculo de los parámetros pendiente (m) y ordenada al origen (b).



Existen criterios más refinados como el de los cuadrados mínimos y el de la máxima verosimilitud pero el criterio gráfico es el que se utilizará en este apunte. Se pueden presentar dos casos:

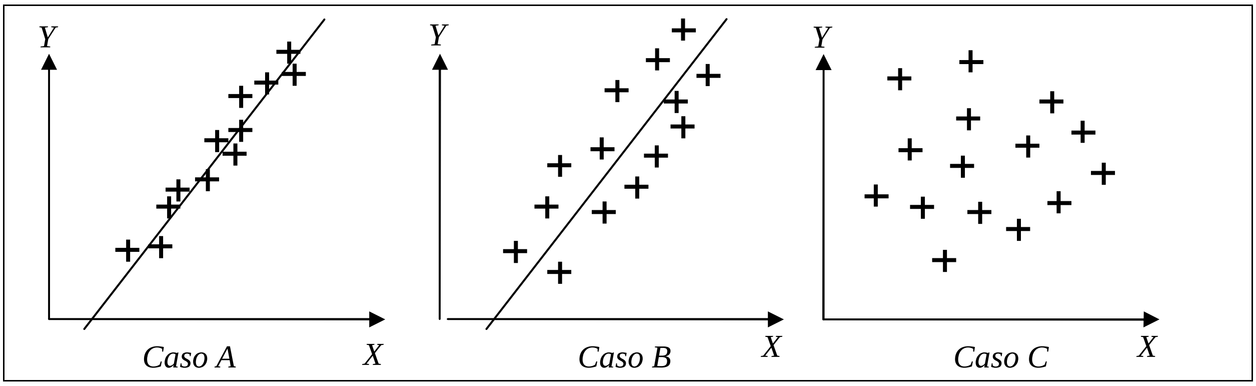
- ✓ que la recta pase por el origen de coordenadas (Recta B como es obvio en este caso) por lo que se utilizará como pívot el origen hasta obtener la recta que mejor ajuste, o;
- ✓ se utiliza como pívot el punto cuyas coordenadas correspondan a los promedios de los valores de X e Y respectivamente (Recta A).

Obtenida la recta, se miden directamente los valores de los parámetros m y b.

4. Validación de la hipótesis

Aquí se debe examinar si realmente puede aceptarse la existencia de una relación lineal entre X e Y.

Puede suceder que las mediciones presenten diferentes distribuciones como se esquematiza a continuación:



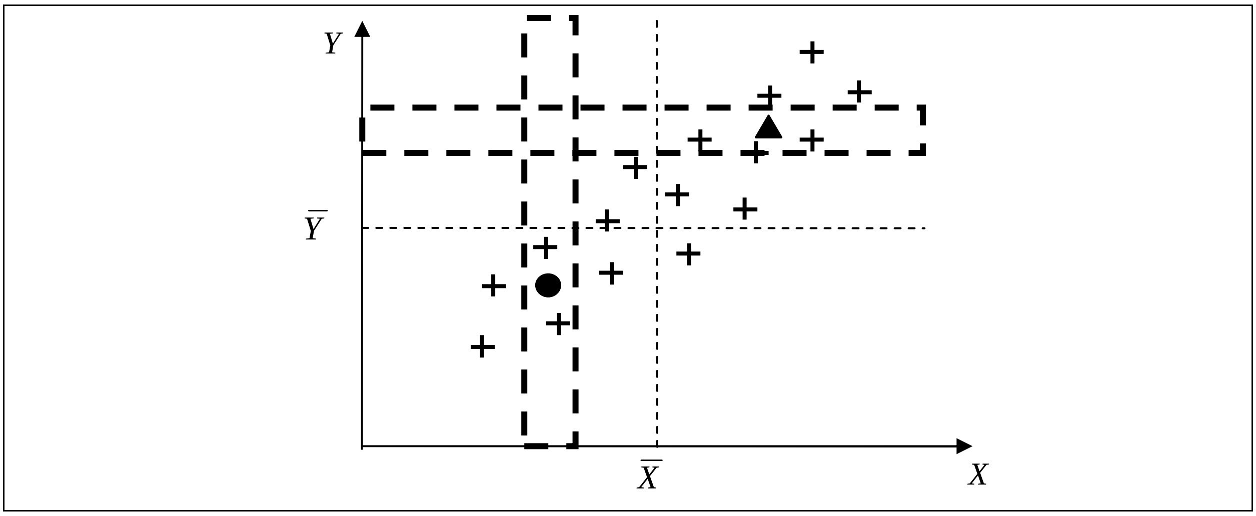
Para el *caso A*, la nube de puntos se agrupa estrechamente a la recta trazada "a ojo" por lo que puede decirse al menos que la experiencia no rechaza la hipótesis.

En el *caso B*, también puede decirse que existe una ley que responde a una tendencia lineal según la recta también trazada "a ojo" aunque la fluctuación de los valores es más grande en comparación con el caso anterior.

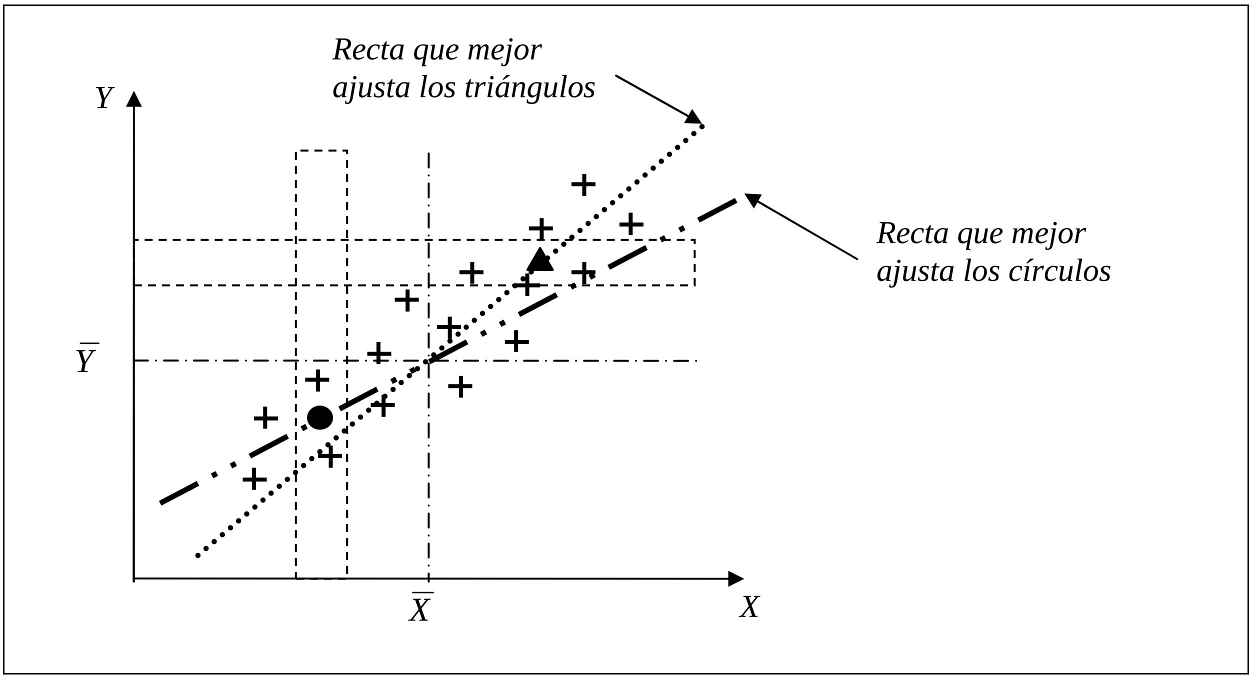
Para el *caso C*, la fluctuación es tan grande entre los datos obtenidos experimentalmente que indudablemente no sugiere una tendencia lineal por lo que debe aceptarse que la experiencia rechaza la hipótesis y esta debe ser descartada, principalmente por su incapacidad de predecir el comportamiento entre las variables en experimentación.

CONCEPTO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

Analizando el *caso B* de la figura anterior, si se promedian los valores de X e *Y* por separado, se obtendrán dos rectas que se indican en la siguiente figura:

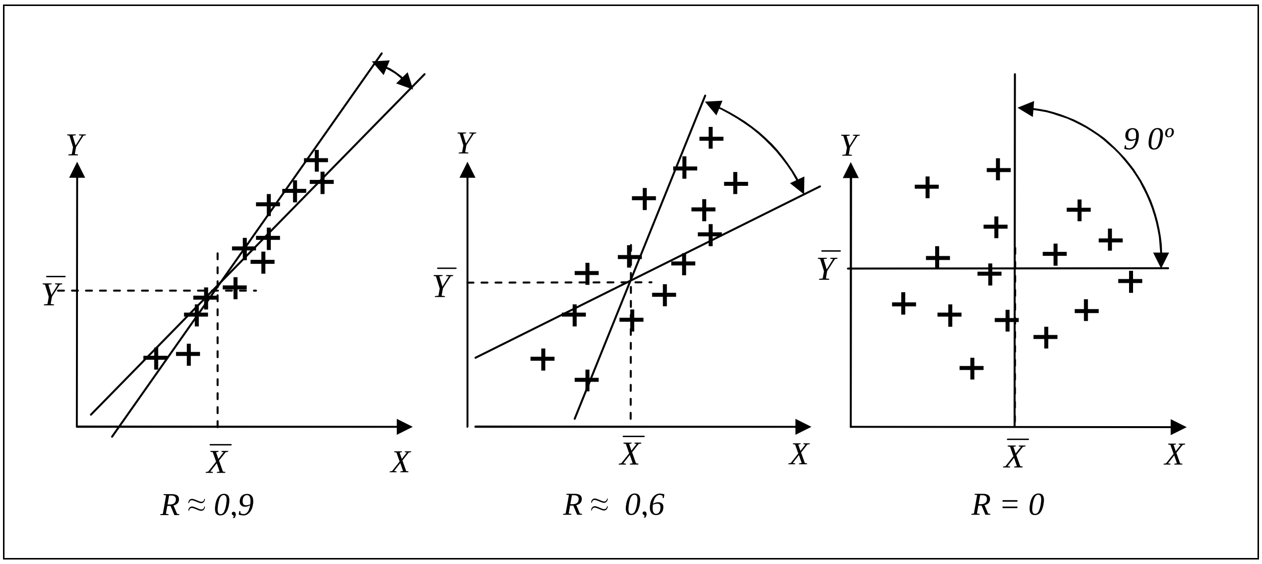


Si se divide el eje de absisas en intervalos formando franjas verticales y se promedian los valores que caen dentro de las mismas, indicándolos con círculos negros (según se indica como ejemplo para una de ellas).
Si se realiza la misma operación pero ahora dividiendo el eje de ordenadas generando franjas horizontales, indicando los valores medios de cada franja con triángulos negros según se indica en la figura como ejemplo solo para una franja.
Si se adapta la recta de mejor ajuste, tanto con los círculos como con los triángulos, se obtendrá por ejemplo lo siguiente:



Cuanto mejor sea la correlación entre los valores de *X* e *Y*, menor será el ángulo que forman estas dos rectas de regresión.
Esto se puede expresar matemáticamente pero no se realizará esto dejando la correspondiente demostración para los cursos de estadística, resaltando solamente que existe un coeficiente de correlación simbolizado con la letra *R* que varía desde una correlación perfecta ($R = 1$) hasta la ausencia de correlación ($R = 0$).
En muchos gráficos donde se indican tendencias o leyes experimentales, se indica este índice, siendo una correlación buena aquella que cumple con $R > 0{,}9$. Si el coeficiente de correlación es

R > 0,3 se considera que no existe correlación alguna entre los valores analizados. La siguiente gráfica ejemplifica los casos anteriores:

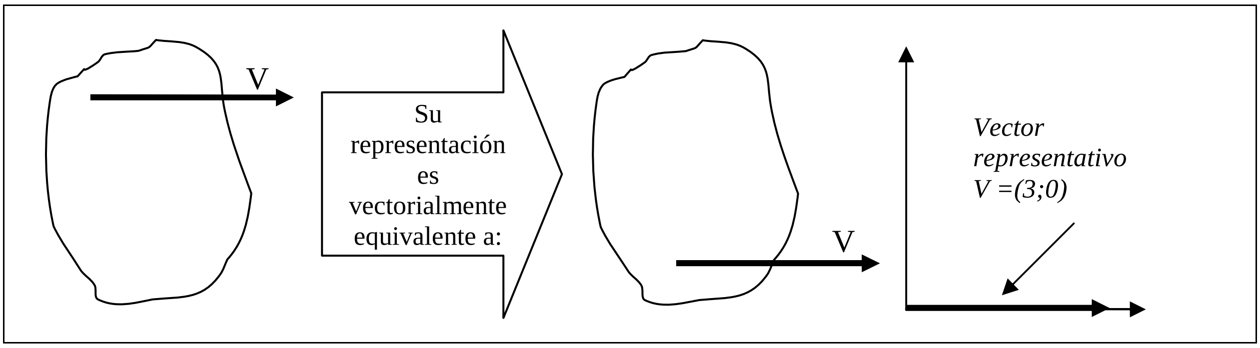


VECTORES

Una magnitud escalar es la que tiene asociada una sola cantidad, por ejemplo: el tiempo, la temperatura, la densidad, el volumen, la energía, la masa.
Una magnitud vectorial es la que, además de la cantidad, tiene asociada otras características como una dirección y un sentido. Son ejemplos de estas magnitudes la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc. A su vez las magnitudes físicas vectoriales pueden pertenecer a uno de los tres tipos siguientes:

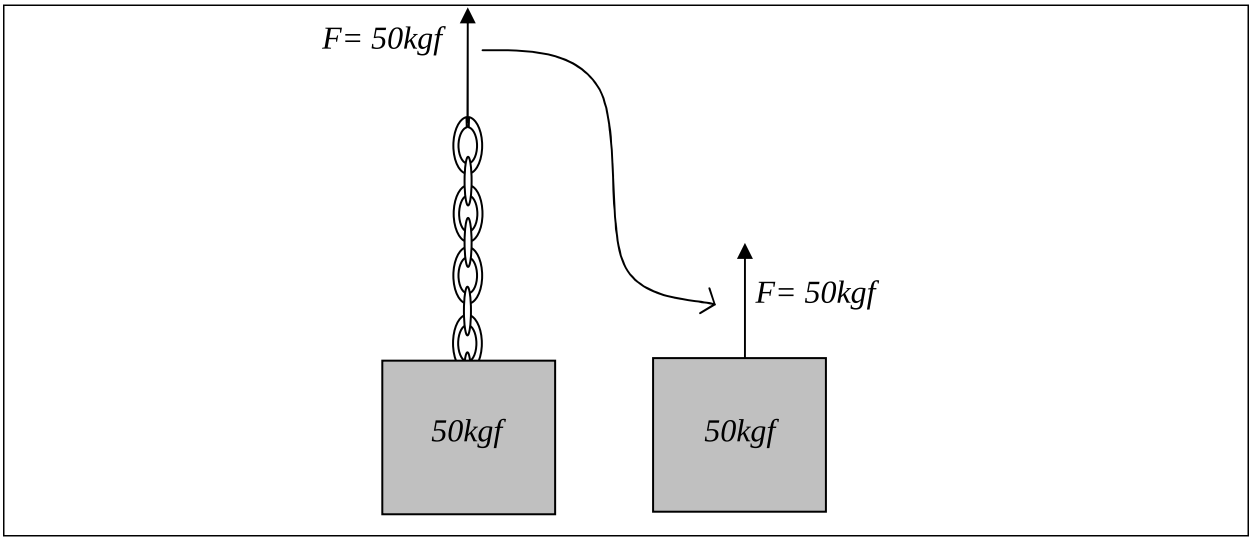
Vector Libre

Es aquel cuya acción no se encuentra confinada o asociada a una única posición. Por ejemplo, si un cuerpo se mueve sin rotar, la velocidad de cualquiera de sus puntos puede representarse mediante un vector y este describirá igualmente bien la dirección, el sentido y el módulo del desplazamiento de todos los puntos del cuerpo. El punto de aplicación es indistinto.
En geometría se lo define con un par ordenado que indica el extremo del mismo, siendo el origen de coordenadas cartesianas ortogonales.



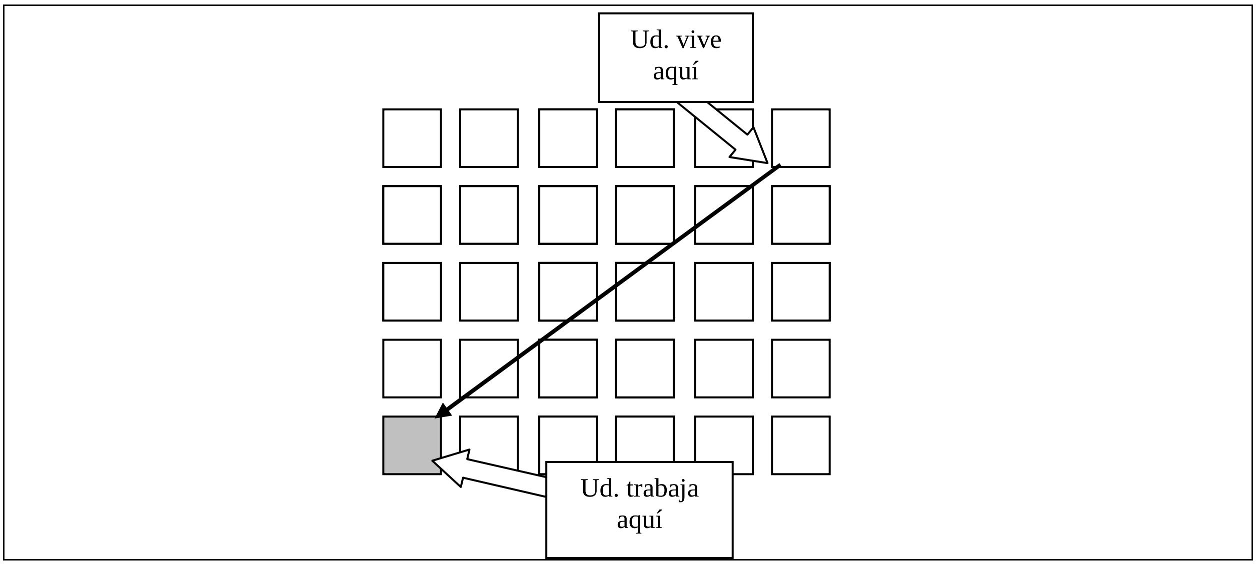
Vector Deslizante

Es aquel para el cual se conserva la dirección (recta de acción) cambiando únicamente el punto de aplicación. Por ejemplo la acción de colgar un cuerpo mediante una cadena (peso despreciable), ya que la fuerza que se ejerce sobre el primer eslabón es la misma que la que está actuando directamente sobre el bloque como se muestra en la figura.



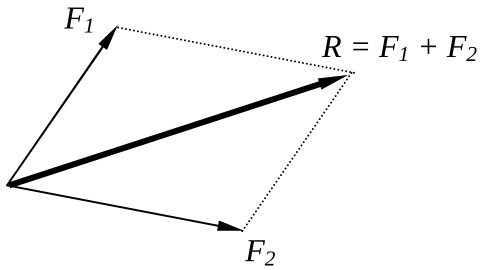
Vector Aplicado o Fijo

Es aquel que indica un punto concreto desde una referencia establecida, por lo tanto ocupa una posición fija en el espacio. Por ejemplo, si un trabajador debe llegar a su lugar de trabajo indicado por el cuadro sombreado desde su vivienda, deberá caminar tres cuadras hacia el sur y cuatro hacia el oeste. Ahora bien, utilizando un vector como el que se muestra, se puede definir perfectamente la ubicación de su lugar de trabajo.
En definitiva se encuentra a 500m en línea recta de su objetivo, que resulta la medida o módulo del vector que denominaremos vector posición. Este tiene su origen en el lugar de referencia y su final en el lugar que se quiere posicionar.

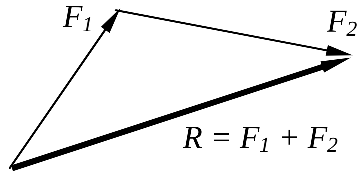


OPERACIONES CON VECTORES

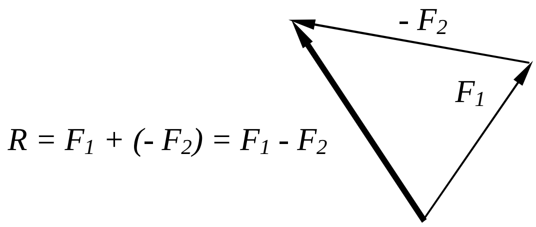
Si se tienen dos o más vectores aplicados sobre un mismo punto, ellos pueden perfectamente reemplazarse por uno solo denominado resultante que tendrá la característica de producir el mismo efecto que todos ellos.
Para realizar operaciones de suma o resta de vectores en forma gráfica se pueden utilizar dos métodos que se muestran a continuación:



Suma de dos vectores F_1 y F_2 en forma gráfica por el método del paralelogramo.

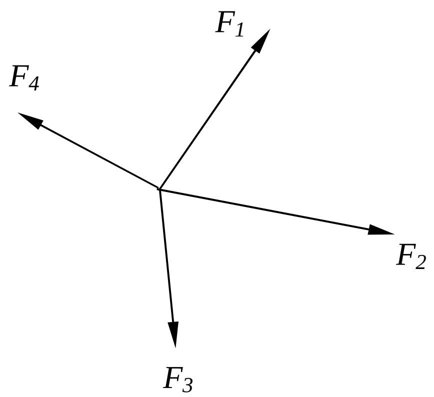


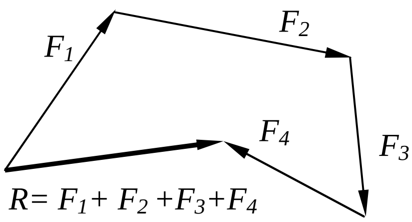
Suma de dos vectores F_1 y F_2 en forma gráfica por el método de la poligonal.



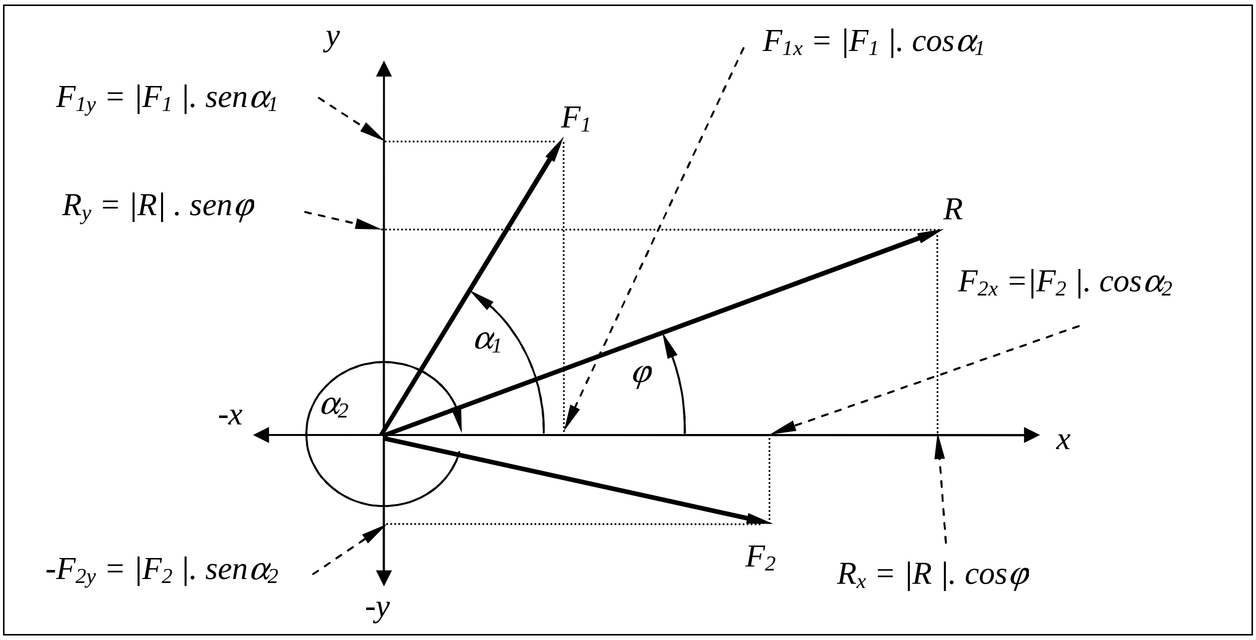
Restas de dos vectores $F_1 - F_2$ en forma gráfica. Tener presente que para restar dos vectores simplemente se debe sumar el vector opuesto.

Cuando se tienen que realizar operaciones entre tres o más vectores, el método de la poligonal resulta el más apropiado de acuerdo al esquema siguiente:





Para realizar las operaciones en forma analítica se trabaja por separado con cada una de las correspondientes componentes de acuerdo al siguiente gráfico:



Analíticamente se expresa la suma de F_1 *y* F_2 como

$$R_x = |F_1|.\cos\alpha_1 + |F_2|.\cos\alpha_2$$
$$R_y = |F_1|.sen\alpha_1 + |F_2|.sen\alpha_2$$
$$|R| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$
$$\varphi = arctg\,\frac{R_y}{R_x}$$

Como el ángulo α_2 se encuentra en el 4º cuadrante, la componente vertical del vector F_2 resulta negativa debido al valor del seno de ese ángulo.
Las operaciones para determinar la resultante de la suma de *n* vectores se muestran a continuación

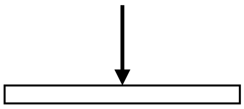
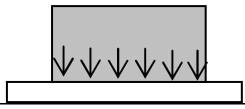
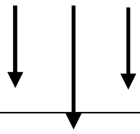
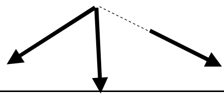
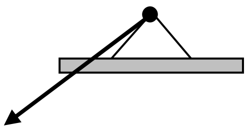
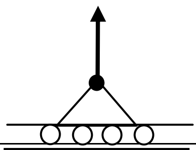
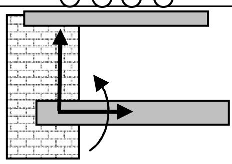
$$R_x = |F_1|.\cos\alpha_1 + |F_2|.\cos\alpha_2 + \cdots + |F_n|.\cos\alpha_n$$
$$R_y = |F_1|.sen\alpha_1 + |F_2|.sen\alpha_2 + \cdots + |F_n|.sen\alpha_n$$
$$|R| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$
$$\varphi = arctg\,\frac{R_y}{R_x}$$

Se resaltan dos aspectos:

- ✓ para evitar complicaciones con los signos, se miden los ángulos partiendo de +*x*, a fin de que la función trigonométrica le otorgue el correspondiente signo de acuerdo al cuadrante donde se encuentra el vector.
- ✓ Solo se suman las componentes de cada uno de ellos de acuerdo a lo indicado.

FUERZA

Se define como fuerza a la acción que un cuerpo ejerce sobre otro. Entre los tipos de fuerza existentes se encuentran las fuerzas de contacto y las fuerzas de campo o a distancia.
Las primeras se caracterizan por tener un contacto físico entre los cuerpos interactuantes, como la tensión que ejerce una cuerda al arrastrar una carga o sostener un peso suspendido y las reacciones de los cuerpos apoyados y otras.
Las de campo son fuerzas que obran a distancia como la fuerza de gravedad, las eléctricas y las magnéticas.
La acción de la fuerza se caracteriza por su módulo o intensidad, por la dirección y sentido de su acción y por su punto de aplicación. Estas propiedades determinan la característica vectorial de la fuerza. Debido al principio de transmisibilidad, una fuerza puede considerarse aplicada a un punto cualquiera de su recta soporte (o de acción) sin que se alteren sus efectos exteriores sobre el cuerpo en el que actúan.
Las fuerzas se clasifican en fuerzas de contacto en el que existe contacto físico directo y las fuerzas a distancia como son las fuerzas magnéticas y las gravitatorias que se analizarán más adelante. Además, las fuerzas pueden estar concentradas o distribuidas siendo estas acciones directas sobre cuerpos o reacciones de apoyos o vínculos como el caso de un libro apoyado sobre una mesa o una carga soportada por el gancho de una grúa.
El esquema muestra alguno de los casos mencionados.

Tipo de Fuerza	***Esquema***	***Característica***
Concentrada		Se encuentra aplicada en un solo punto
Distribuida		Se encuentra aplicada uniformemente en el elemento sobre el que actúa.
Paralelas		Se encuentra aplicada en más de un punto y paralelas entre sí.
Concurrentes		Todas las fuerzas se encuentran aplicadas en un punto y con diferentes direcciones.
Reacción de vínculo fijo		Reacciona con una fuerza (o sus componentes horizontal y vertical) cualquiera sea la dirección e intensidad de la fuerza actuante.
Reacción de vínculo móvil		Reacciona solo con una fuerza normal a la superficie vinculante. Si se aplica una fuerza diferente a la vertical, el vínculo se moverá en la dirección de la superficie.
Reacción del empotramiento		Reacciona con una fuerza (o sus componentes horizontal y vertical) y un momento

PAR O MOMENTO DE FUERZAS

Si se quiere trasladar un cuerpo es necesario aplicar una fuerza. Pero si se quiere hacerlo girar, no siempre aplicando una fuerza se logra el objetivo.
Por ejemplo si a un libro apoyado sobre una mesa se le aplica una fuerza que pase por el centro de masa[11] del libro (ver figura A), este se trasladará de acuerdo al esquema siguiente.

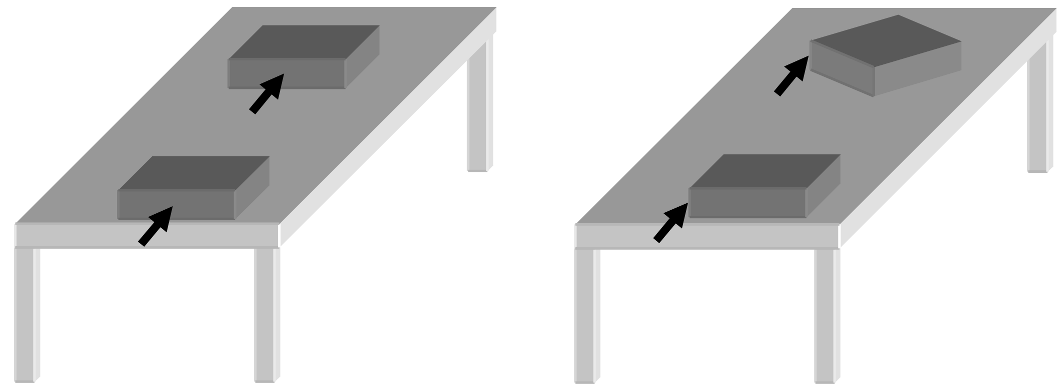


Figura A ***Figura B***

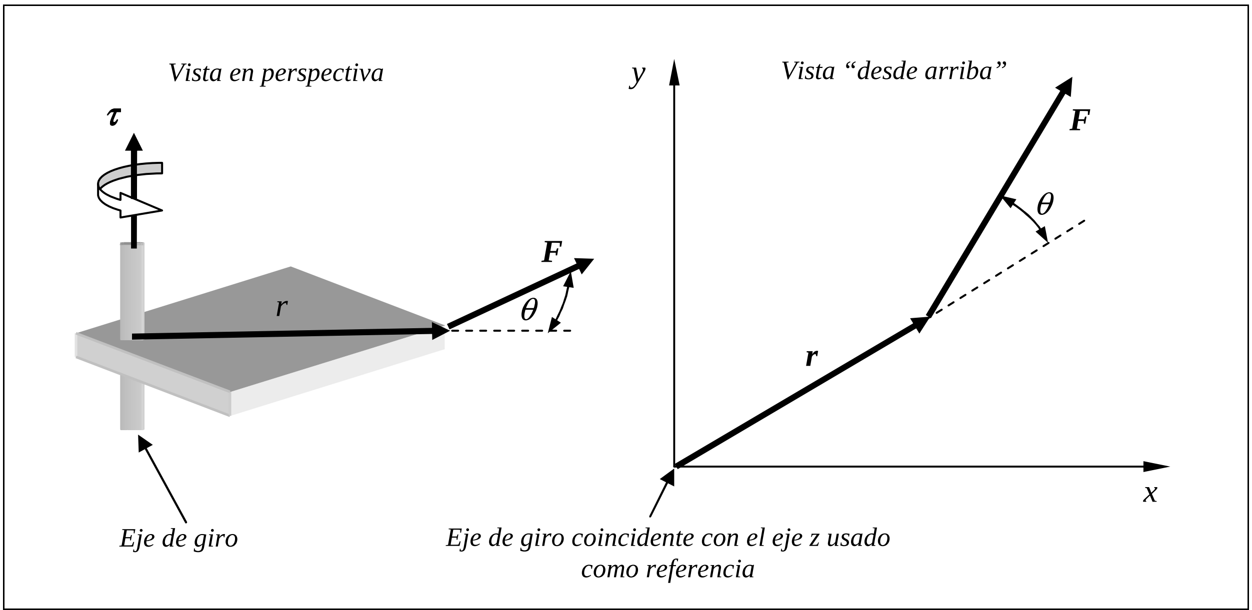
Pero, si se le aplica la misma fuerza en uno de sus extremos (ver figura B), el libro efectuará un giro, lo cual se puede comprobar experimentalmente.
Por lo tanto, si se desea hacer girar un cuerpo es necesario aplicar lo que se conoce como momento o torque, magnitud vectorial que se define como el producto vectorial del vector *r* que representa la distancia desde el eje de giro tomado como referencia al punto de aplicación de la fuerza por el vector fuerza *F* de acuerdo a la expresión:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{pmatrix}$$

Cada uno de los vectores responde a la configuración mostrada en el esquema siguiente, donde se indica una perspectiva del vector fuerza *F* aplicado en un punto de la placa rectangular indicada por el vector posición *r*. Se indica además el momento o torque mediante un vector perpendicular.

[11] Se define como centro de masa de un cuerpo al punto en el que se puede considerar concentrada toda la masa del cuerpo.



Estos vectores son llevados a un plano cartesiano con el sistema visto "desde arriba".
La interpretación geométrica del torque está dada por la expresión

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot sen\theta$$

De aquí se puede deducir que el momento de una fuerza será nulo si r = 0, lo que equivale a decir: no existe brazo de palanca, que la fuerza sea nula o que la dirección de la fuerza y el brazo de palanca sea la misma, es decir θ = 0.
La magnitud vectorial torque se mide en el Sistema Internacional en *N* . *m* y su sentido se puede identificar utilizando la regla de la mano derecha.

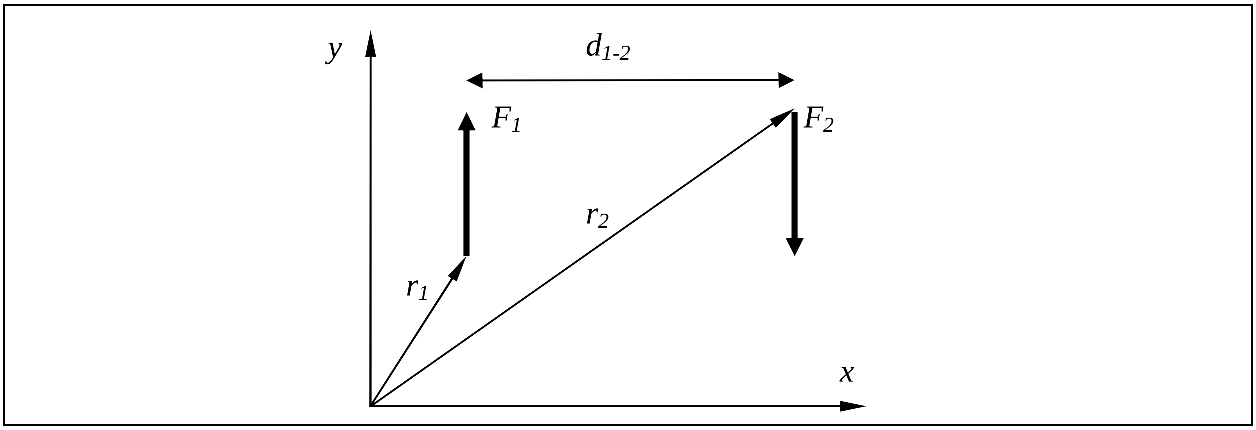
SISTEMA DE FUERZAS EN EQUILIBRIO

Ya se trató el tema relacionado a los vectores y sus operaciones, conceptos que serán aplicados en la resolución de sistemas de fuerzas en equilibrio.
Si un sistema mecánico[12] se encuentra en reposo se deben cumplir que la resultante de todas las *N* fuerzas actuantes sea nula. También se cumple esta condición en los sistemas que se mueven a velocidad constante y en forma rectilínea.
Si además el sistema mecánico tiene la posibilidad de girar la condición de equilibrio rotacional es que el momento de las fuerzas respecto a un punto cualquiera del plano valga cero. Dichas condiciones se enuncian a continuación en forma vectorial:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}i = 0 \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}i = 0$$

Se resalta el hecho que con solo la sumatoria de fuerzas nula no es suficiente, puesto que el sistema de fuerzas denominado cupla[13] cumple con la primera condición pero no con la segunda de acuerdo al siguiente ejemplo:

[12] Se define un sistema mecánico como un cuerpo o un grupo de cuerpos que puede aislarse del resto de los demás cuerpos.
[13] Se denomina cupla a un sistema de dos fuerzas paralelas de sentido contrario donde el módulo de las mismas es el mismo.



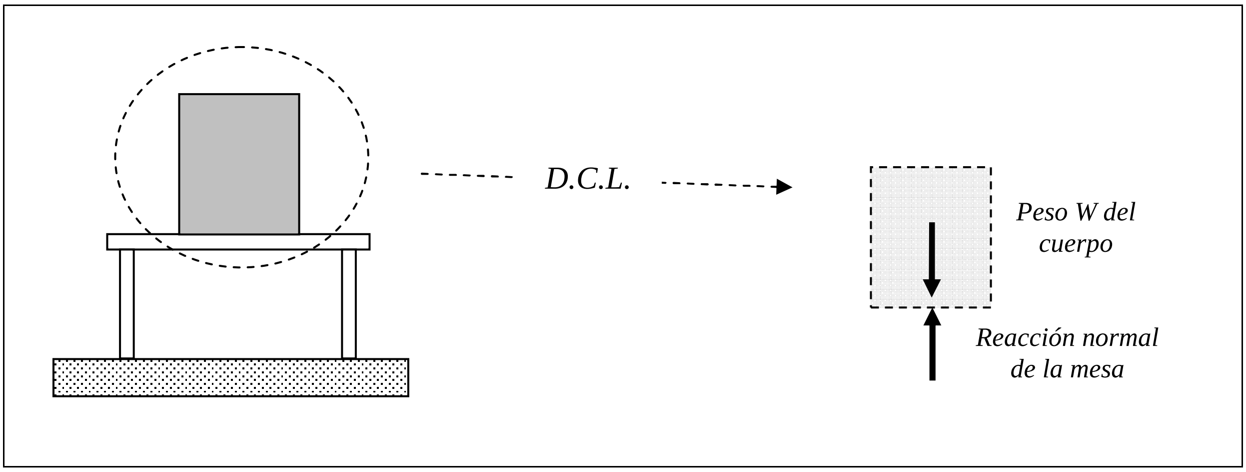
Sumando los momentos respecto al origen de coordenadas de cada una de las fuerzas se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{N} Mi = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 =$$

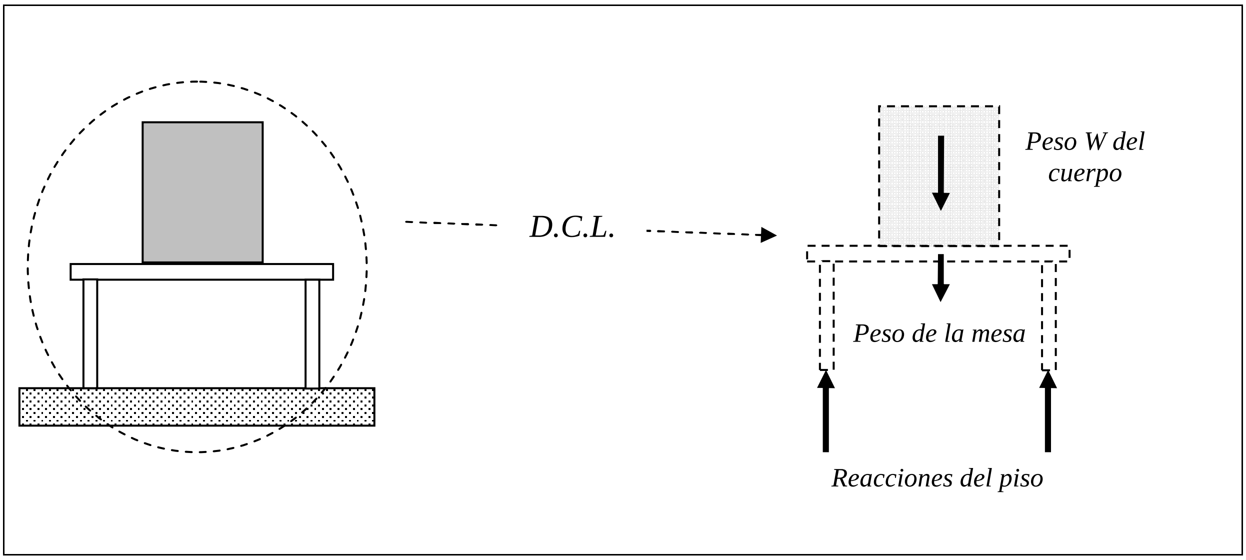
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{1x} & r_{1y} & 0 \\ F_{1x} & F_{1y} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{2x} & r_{2y} & 0 \\ F_{2x} & F_{2y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{1x} & r_{1y} & 0 \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{2x} & r_{2y} & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} =$$

$$r_{1x}.F.\vec{k} - r_{2x}.F.\vec{k} = (r_{1x} - r_{2x}).F.\vec{k} = d_{1-2}.F.\vec{k} \neq 0$$

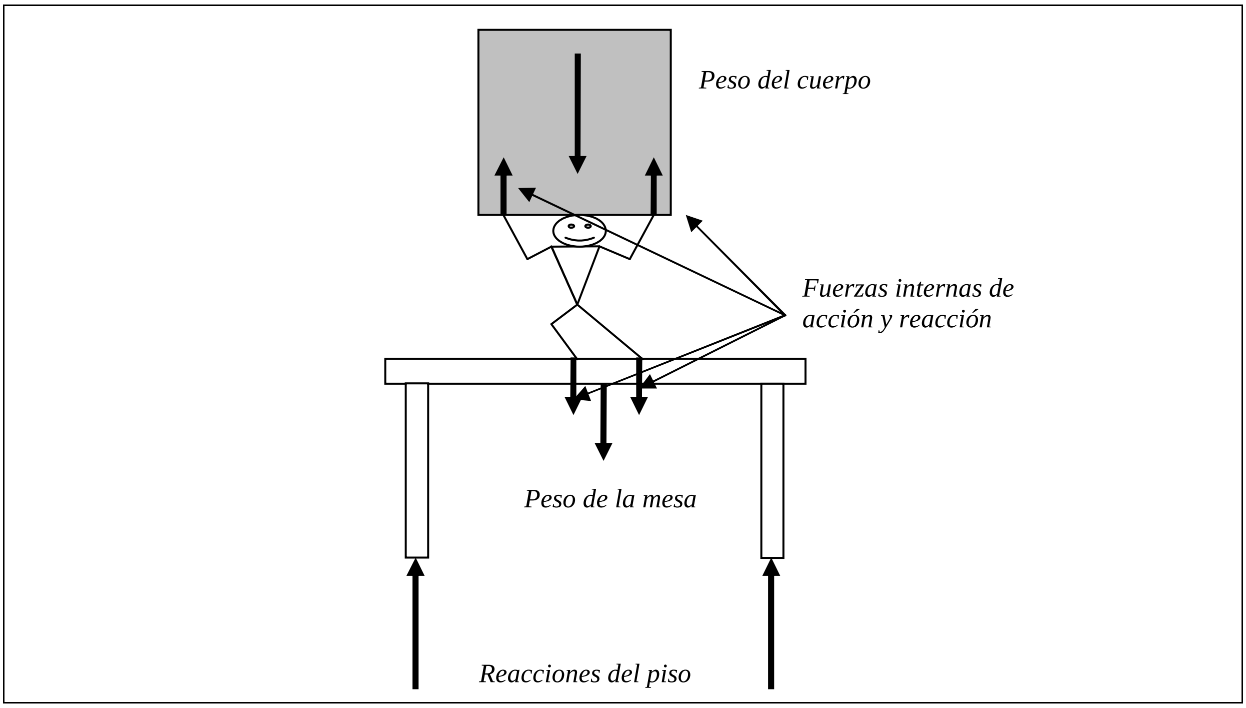
Es fundamental para determinar si un sistema de fuerzas actuando sobre un sistema mecánico se encuentra en equilibrio la realización del diagrama de cuerpo libre (D.C.L) o diagrama de sólido libre siendo este un paso **muy importante** en la resolución de problemas de mecánica.
A continuación se ejemplifica el caso de un cuerpo apoyado sobre una mesa horizontal



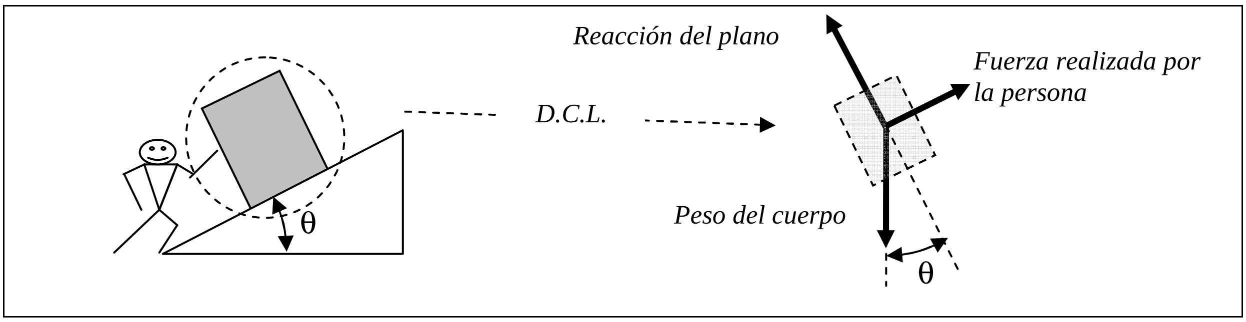
Para este caso el sistema mecánico aislado para su análisis es el cuerpo apoyado sobre la mesa. Si se quiere estudiar el sistema mecánico cuerpo-mesa, el diagrama de cuerpo libre será:

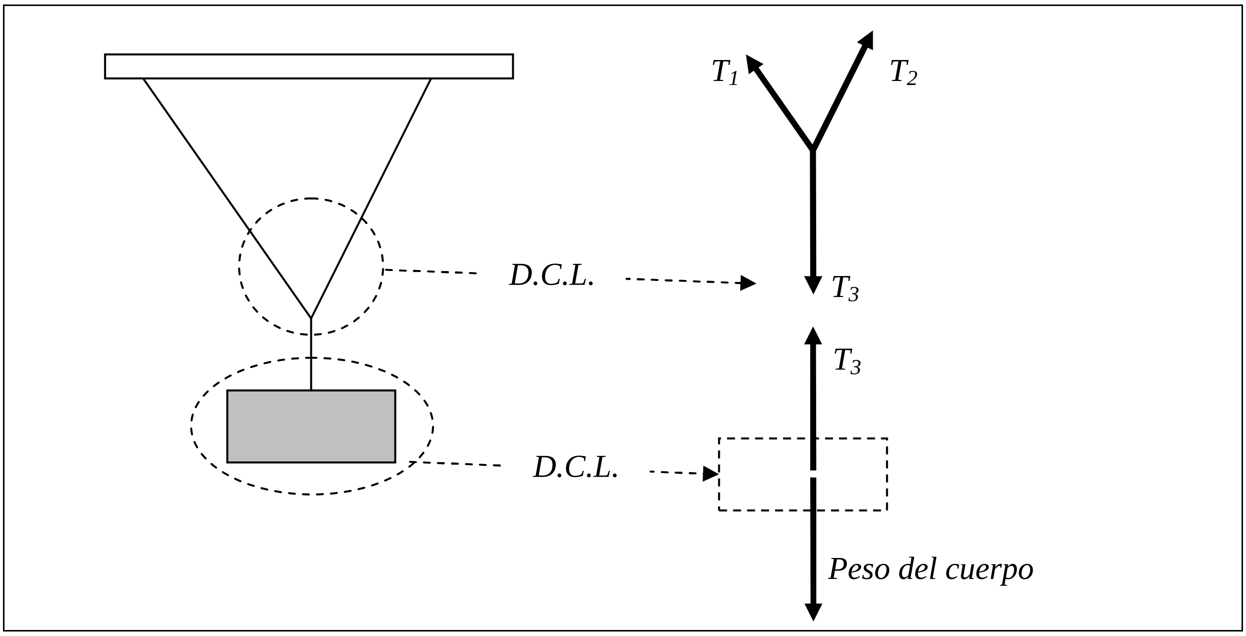


Aquí la fuerza que realiza el cuerpo sobre la mesa y viceversa es para este caso una fuerza interna que se puede entender como la acción que realiza un operario (sin peso) sujetando el cuerpo y a la vez apoyándose sobre la mesa de manera que ambas fuerzas se anulan mutuamente.



Algunos ejemplos de diagramas de cuerpo libre:



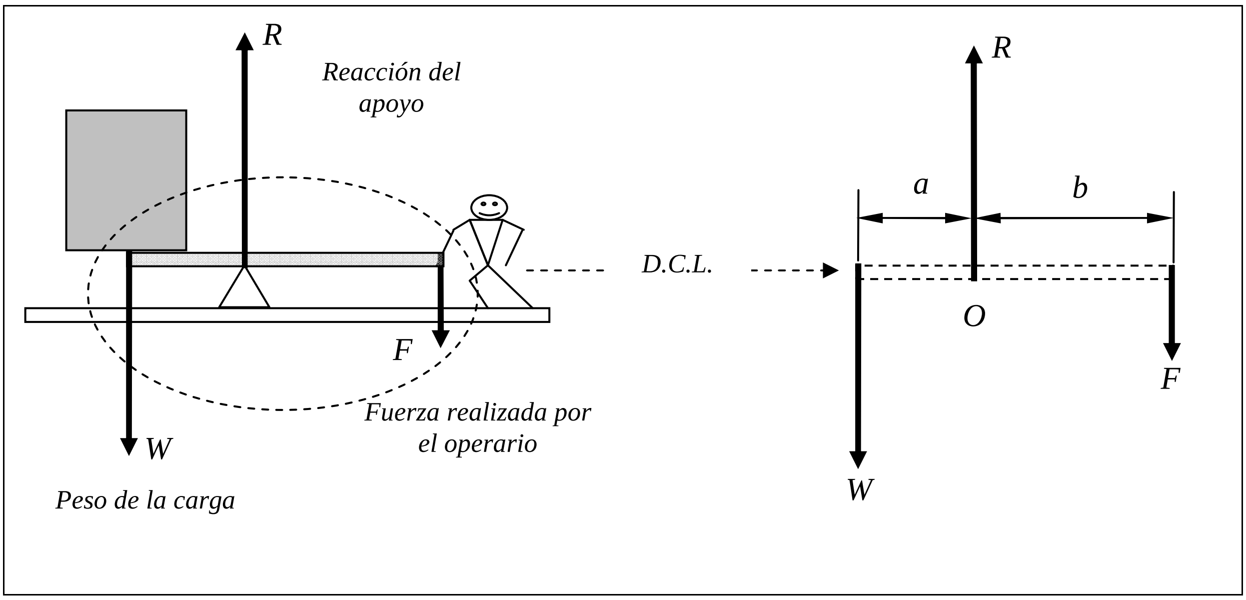


MÁQUINAS SIMPLES

Estas se utilizan para facilitar el movimiento de cargas pesadas, realizando menor esfuerzo por parte del operario.
A continuación se analizarán algunas de ellas.

Palanca

Una de las máquinas simples más utilizadas presenta diferentes formas como las barretas, “pata de cabra”, tenazas, etc.
Para determinar los esfuerzos realizados por el operario se aplicarán las condiciones de equilibrio.
A continuación se esquematiza el uso de una palanca simple donde un operario mantiene una carga *W* realizando un esfuerzo *F*.



Aplicando las condiciones de equilibrio se tiene que la sumatoria de fuerzas vale:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = \vec{W} + \vec{R} + \vec{F} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -W \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W + R - F \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La sumatoria de momentos, respecto al punto de apoyo “O”, vale:

$$\sum_{i=1}^{N} Mi = \vec{a} \times \vec{W} + \vec{0} \times \vec{R} + \vec{b} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Realizando las operaciones algebraicas necesarias y despejando la fuerza F que realiza el operario, se tendrá:

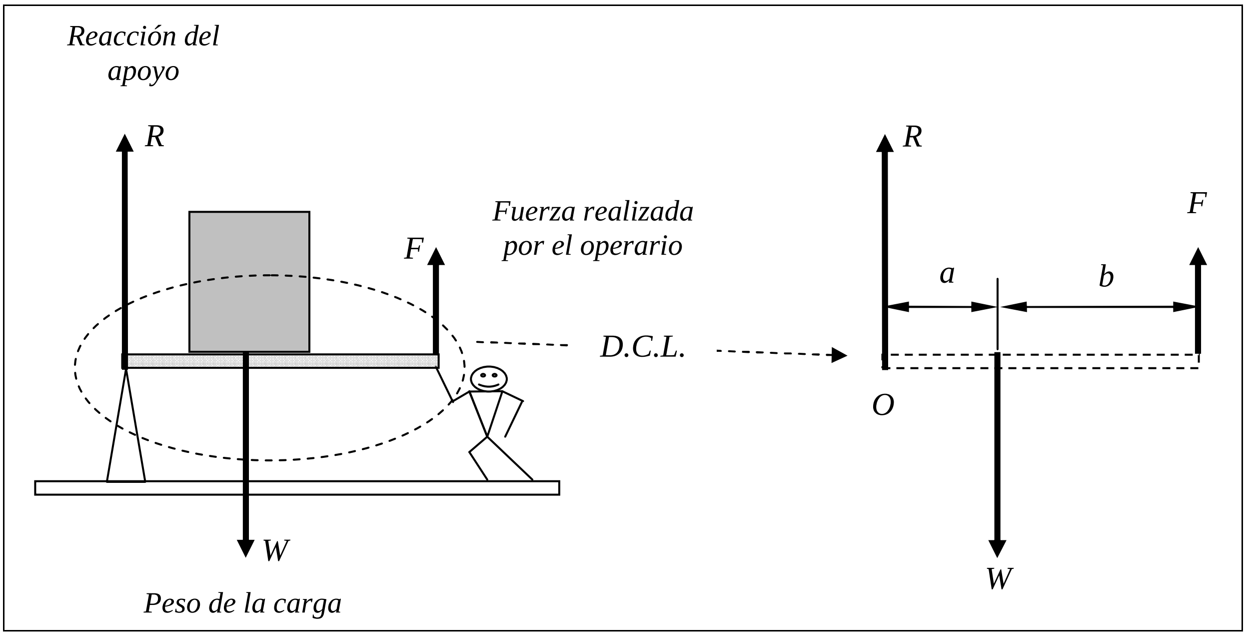
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -W & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & 0 & 0 \\ 0 & -F & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W.a.\vec{k} + 0.R.\vec{k} - F.b.\vec{k} = 0$$

$$W.a - F.b = 0$$

$$F = \frac{a}{b} \cdot W$$

Analizando esta última expresión, se desprende que, para una longitud de palanca (en este caso a+b) cuanto más cerca se encuentre la carga del apoyo (y consecuentemente más distancia del apoyo al operario) menor será el esfuerzo a realizar para mantener la carga.
Otra alternativa de utilización de la palanca puede ser la siguiente



Realizando las mismas operaciones que en el caso anterior, se tendrá finalmente la expresión de la fuerza del operario en función de las distancias para esta configuración:

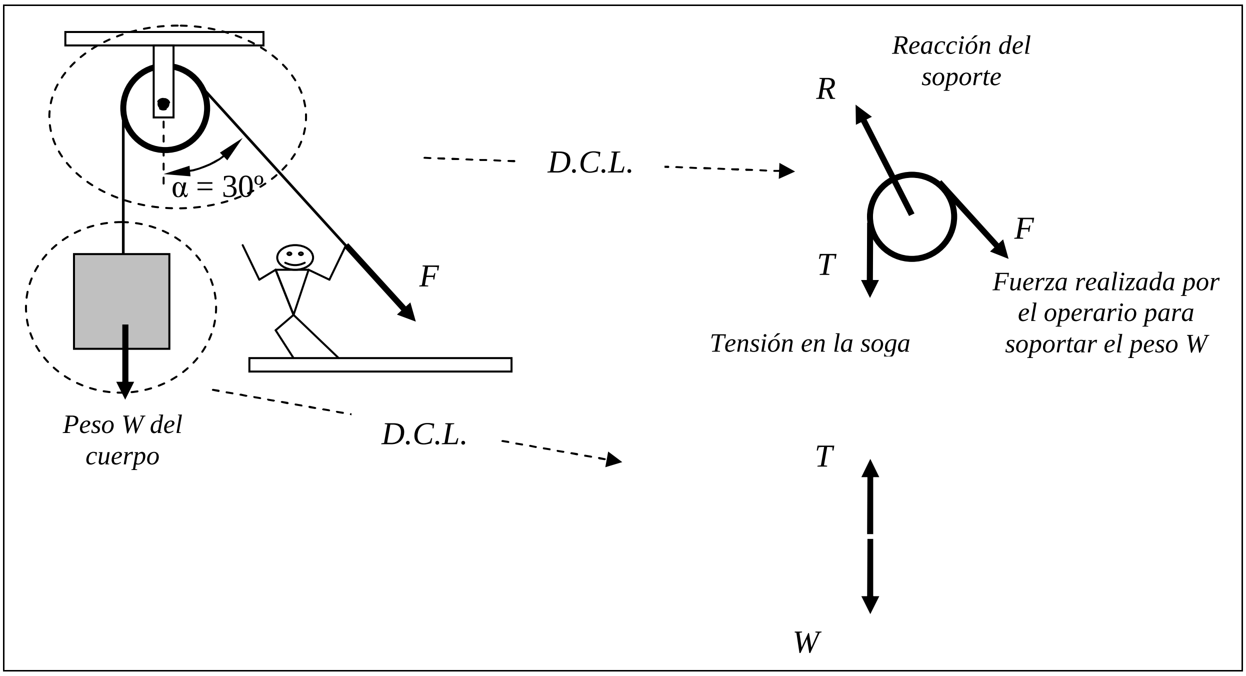
$$F = \frac{a}{(a+b)} \cdot W$$

Se desprende que, cuando b = 0 el operario realizará una fuerza exactamente de la misma magnitud que el peso de la carga y cuanto más cerca se encuentre la carga del apoyo, menor será el esfuerzo a realizar para mantenerla en esa posición.

Para pensar
Qué configuración le conviene más al operario para mantener la carga en equilibrio, ¿ubicar en la mitad de la palanca la carga o el apoyo?

Poleas

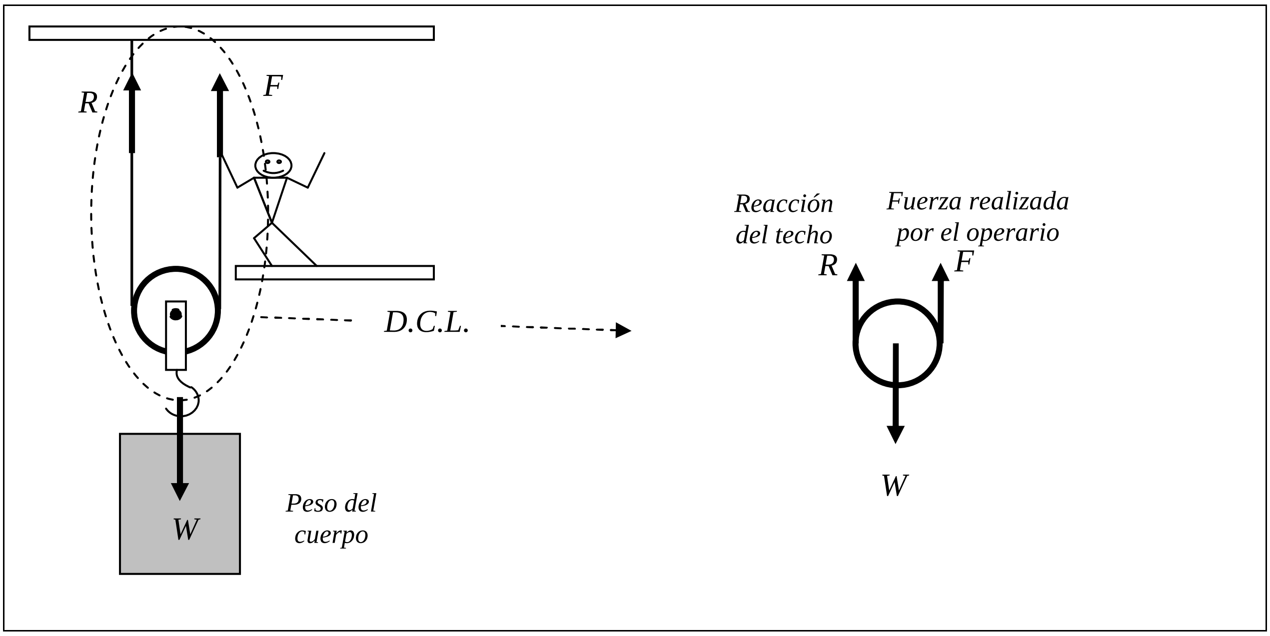
Se pueden presentar en dos configuraciones, fijas o móviles y además en forma combinada dando lugar a los denominados aparejos, los que se analizarán más adelante.
A continuación se muestra una polea fija utilizada para elevar cargas que, en este caso, se encuentra en equilibrio estático, es decir, la carga se mantiene en esa posición debido al esfuerzo que realiza el operario. Además se muestra el correspondiente diagrama de cuerpo libre.



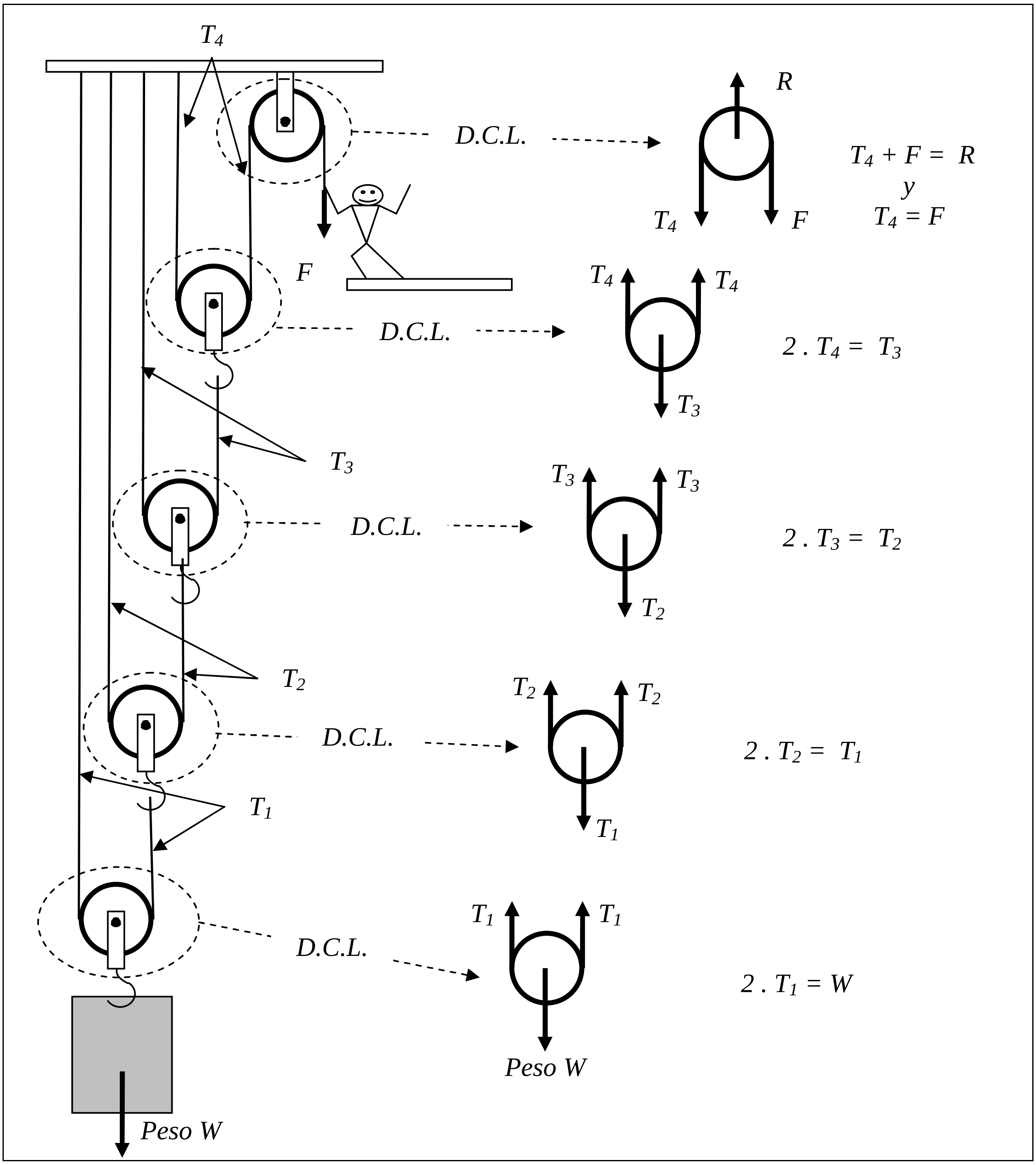
Se desea determinar el esfuerzo resultante sobre el eje de la polea debido a la acción simultánea de la carga y de la fuerza que realiza el operario.
Aplicando las condiciones de equilibrio a la polea, ubicando los ejes cartesianos en el centro de la misma, se tendrá:

$$R_x = |F|.\cos\alpha_1 + |T|.\cos\alpha_2 =$$
$$R_x = |50|.\cos 300º + |50|.\cos 270º = 25N$$
$$R_y = |F|.sen\alpha_1 + |T|.sen\alpha_2 =$$
$$R_y = |50|.sen300º + |50|.sen270º = -93N$$
$$|R| = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}}$$
$$|R| = 96N$$
$$\varphi = arctg\,\frac{R_y}{R_x}$$
$$\varphi = -75º$$

En el caso de la polea móvil que se muestra a continuación, el operario sostiene un extremo de la soga mientras el otro se sujeta al techo pasando por la polea que en este caso se moverá de acuerdo a como manipule la soga el operario. Si la mantiene quieta sosteniendo la carga, solo necesitará realizar un esfuerzo equivalente a la mitad del peso total de la carga y el techo se encargará de la otra mitad.



Otra configuración de poleas, denominada aparejo potencial, se utiliza para disminuir el esfuerzo del operario cuya disposición es la siguiente:



Junto a cada Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) se presentan las equivalencias entre las tensiones de cada una de las poleas que, con los cálculos algebraicos correspondientes, se tiene:

$$W = 2 \cdot T_1$$
$$W = 2 \cdot 2 \cdot T_2$$
$$W = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot T_3$$
$$W = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot T_4$$
$$W = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot F$$
$$W = 2^4 \cdot F \Rightarrow F = \frac{W}{2^4}$$

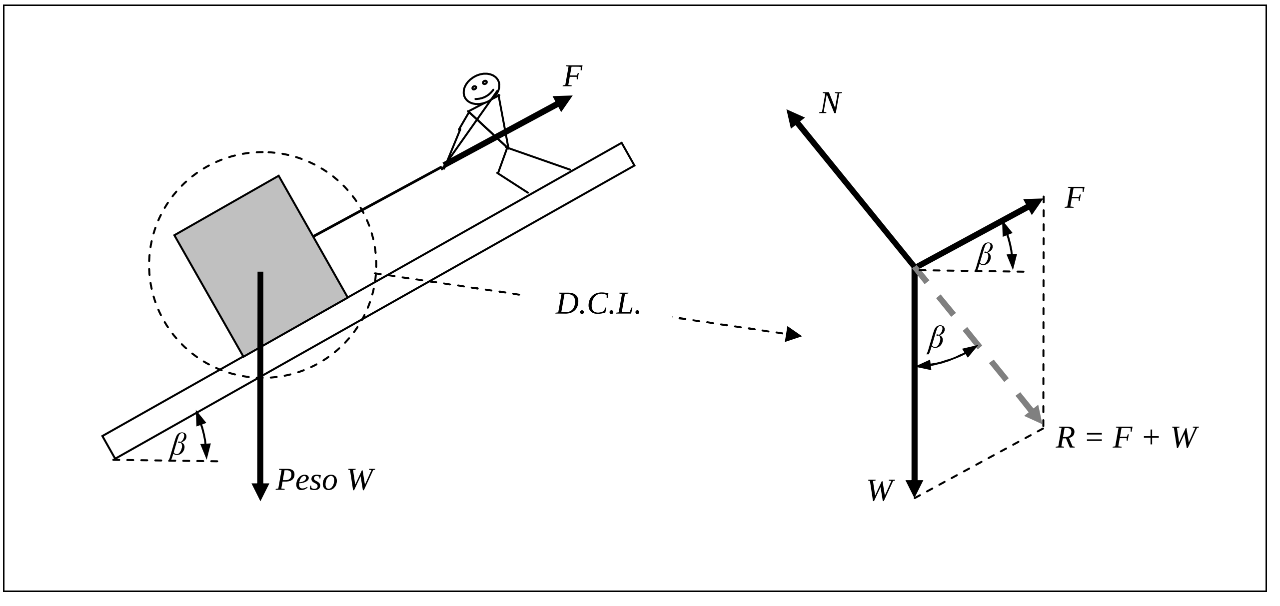
Generalizando se puede decir que, dadas *N* poleas móviles ubicadas según se muestra, la fuerza *F* que el operario debe realizar para mantener en equilibrio una carga W responde a la expresión:

$$F = \frac{W}{2^N}$$

Para pensar
Existe otra configuración de poleas que se denomina aparejo exponencial que también utiliza poleas móviles. ¿Qué configuración presenta el menor esfuerzo al operario para mantener la carga en equilibrio con la misma cantidad de poleas móviles?

Plano Inclinado

Son también sistemas mecánicos para facilitar al operario elevar cargas mediante esfuerzos menores a las mismas. Se ejemplifica esta operación y su correspondiente diagrama de cuerpo libre y la aplicación de las condiciones de equilibrio.



$$\sum_{i=1}^{N} Fi = \vec{W} + \vec{F} + \vec{N} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -W \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot sen\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \cdot \cos(90^o + \beta) \\ N \cdot sen(90^o + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Realizando las operaciones trigonométricas correspondientes para esta configuración particular queda:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -W \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot sen\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N \cdot sen\beta \\ N \cdot \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$F \cdot \cos\beta - N \cdot sen\beta = 0 \Rightarrow N = \frac{F \cdot \cos\beta}{sen\beta} = F \cdot tg^{-1}\beta$$

$$-W + F \cdot sen\beta + N \cdot \cos\beta = 0$$

$$-W + F \cdot sen\beta + F \cdot tg^{-1}\beta \cdot \cos\beta = 0$$

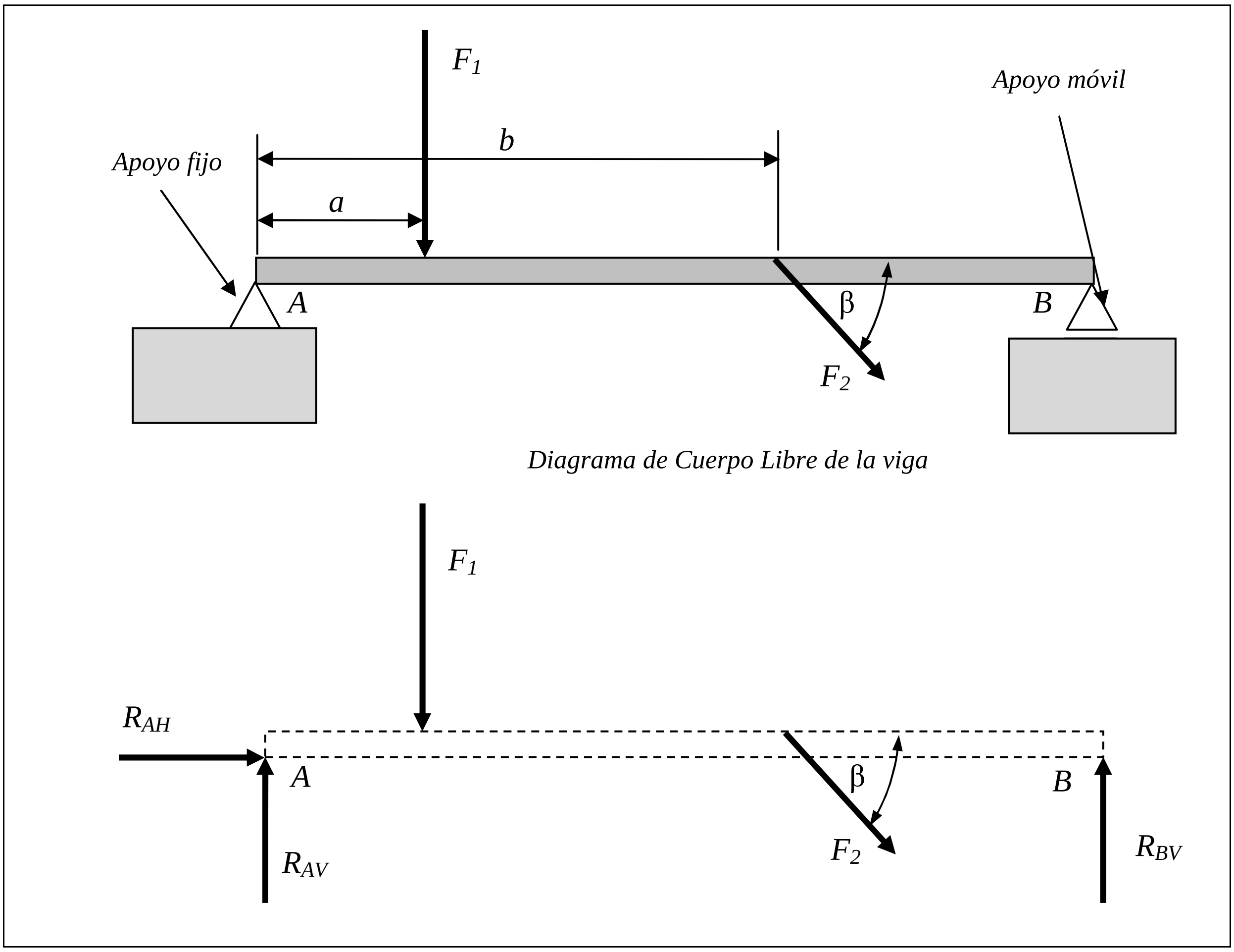
$$F \cdot (sen\beta + \cdot tg^{-1}\beta \cdot \cos\beta) = W$$

$$F = W \cdot \left(\frac{1}{sen\beta} \right)$$

Para pensar
De esta última expresión se desprende que, cuando el ángulo $\beta = 90^o$ el esfuerzo que realiza el operario es exactamente el mismo que el peso del cuerpo, lo cual es lógico pues la carga está “colgada” pero: ¿qué sucede cuando $\beta = 0^o$?

Vigas

Son estructuras rígidas que se utilizan en la construcción para soportar tanto cargas puntuales como distribuidas. Algunos ejemplos se desarrollarán más adelante y, para comenzar, se desarrollará un ejemplo de una viga sencilla para presentar el método de utilización de las condiciones de equilibrio y la disposición de los apoyos.
Respecto a estos se debe recordar que para una viga apoyada son necesarios dos vínculos, uno fijo y otro móvil, esto se justificará en cursos de estática más avanzados.
Para comenzar se presenta el siguiente caso donde se considera la viga sin peso:



Las ecuaciones de equilibrio son:
Aplicando las condiciones de equilibrio, se tiene que la sumatoria de fuerzas vale:

$$\sum_{i=1}^{N} Fi = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos\beta \\ -F_2 \cdot sen\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{BV} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

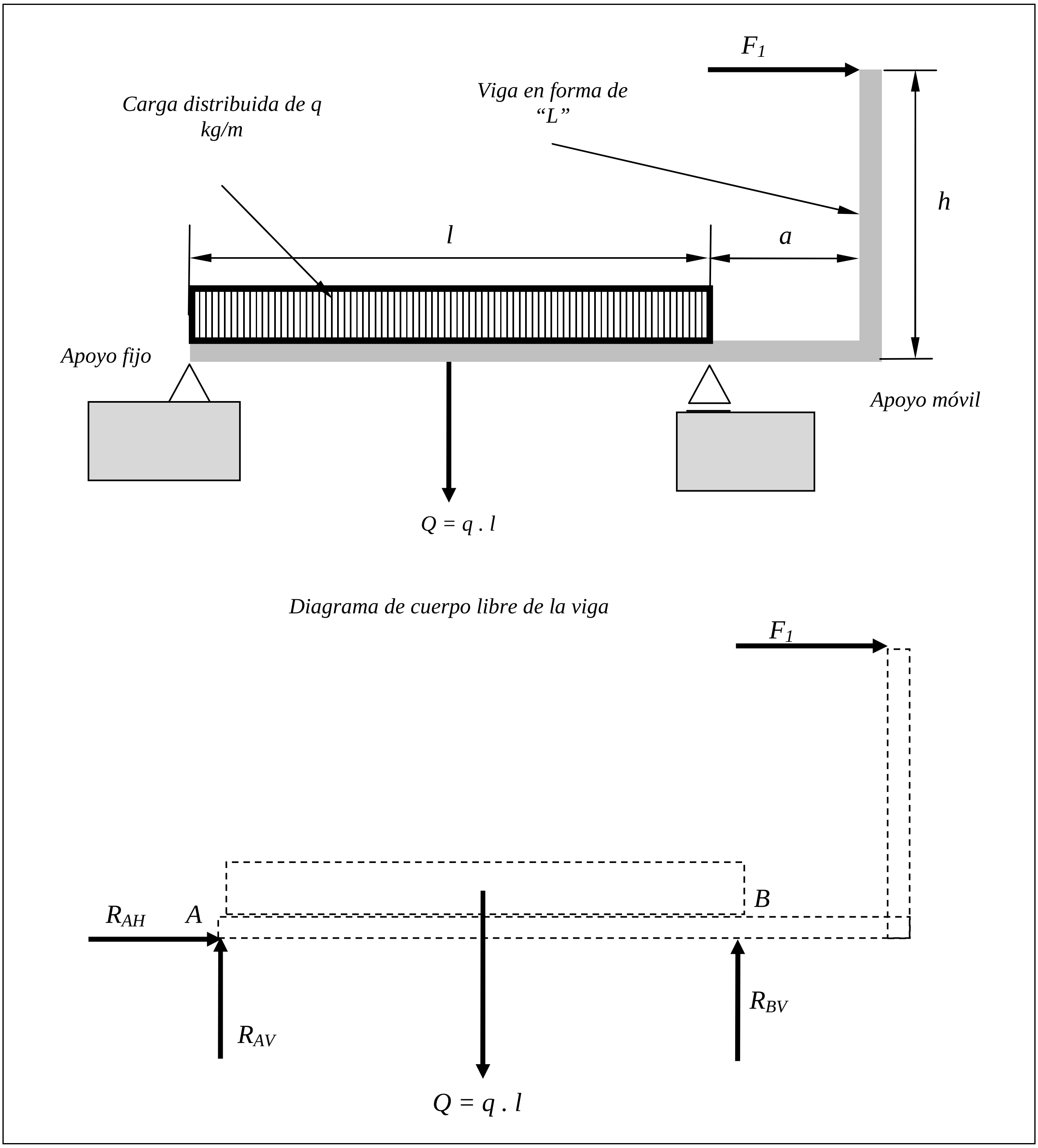
Realizando la sumatoria de momentos respecto al punto de apoyo "A" queda:

$$\sum_{i=1}^{N} M_A = \vec{0} \times R_A + \vec{a} \times \vec{F}_1 + \vec{b} \times \vec{F}_2 + \vec{l} \times \vec{R}_{BV} = \vec{0}$$

Realizando las operaciones algebraicas necesarias y despejando la fuerza R_{BV} queda:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -F_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & 0 & 0 \\ F_2 \cdot \cos\beta & -F_2 \cdot sen\beta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & R_{BV} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otra configuración de viga en forma de "L" según se muestra sombreada de gris, presenta sobre el tramo horizontal una carga uniformemente distribuida de q N/m cuyo peso total valdrá Q = q . l



Las ecuaciones de equilibrio utilizadas para determinar las reacciones de vínculo sobre la viga son:

$$\sum_{i=1}^{N} Fi = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{N} M_B = \vec{0}$$

Aplicando estas condiciones de equilibrio se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} Fi = 0$$
$$\vec{F}_1 + \vec{Q} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{BV} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

De esta expresión, se obtiene analizando la componente *"i"* que
$$F_1 + R_{AH} = 0 \Rightarrow R_{AH} = -F_1$$

Además, de la componente *"j"*, se tiene:

$$-Q + R_{AV} + R_{BV} = 0 \Rightarrow R_{BV} = Q - R_{AV}$$

Realizando la sumatoria de momentos respecto al punto de apoyo "B", se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} M_B = \vec{l} \times R_A + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{Q} + \vec{0} \times \vec{R}_B + \vec{d} \times \vec{F}_1 = \vec{0}$$

En su forma matricial, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -l & 0 & 0 \\ R_{AH} & R_{AV} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -l/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{BV} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & h & 0 \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones algebraicas necesarias y sabiendo que solo quedan las componentes en "k" se tiene:

$$-l \cdot R_{AV} + \frac{l}{2} \cdot Q + 0 - h \cdot F_1 = 0$$
$$R_{AV} = \frac{\frac{l}{2} \cdot Q - h \cdot F_1}{l}$$

Reemplazando esta en la expresión obtenida más arriba queda:

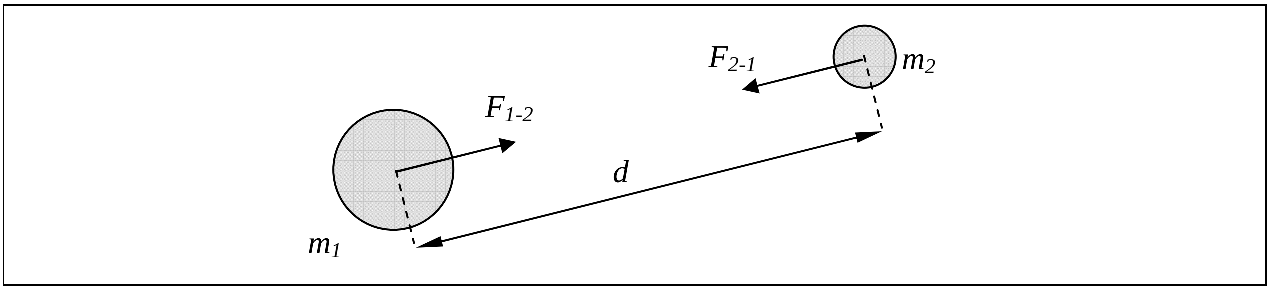
$$R_{BV} = Q - \frac{\frac{l}{2} \cdot Q - h \cdot F_1}{l} = \frac{Q}{2} - \frac{h \cdot F_1}{l}$$

Para pensar

De esta última expresión se desprende que la reacción en el apoyo *B* puede tener diferentes signos pero ¿qué sucede si vale cero?

INTERACCIONES GRAVITATORIAS

Se estudiará a continuación un tipo de interacción muy importante denominada interacción gravitatoria, que corresponde a las fuerzas de campo. La característica fundamental es que siempre está actuando entre dos cuerpos y no puede modificarse desde el exterior, es decir, no se puede aislar un cuerpo de la atracción de otros.
Como ejemplo, se puede citar la atracción que la tierra ejerce sobre los cuerpos y viceversa, ya sea que se trate de una persona parada sobre su superficie o de un satélite como la luna a miles de kilómetros.



La ley que rige esta interacción se denomina "ley de gravitación universal" y responde a la expresión:

$$F_{1-2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

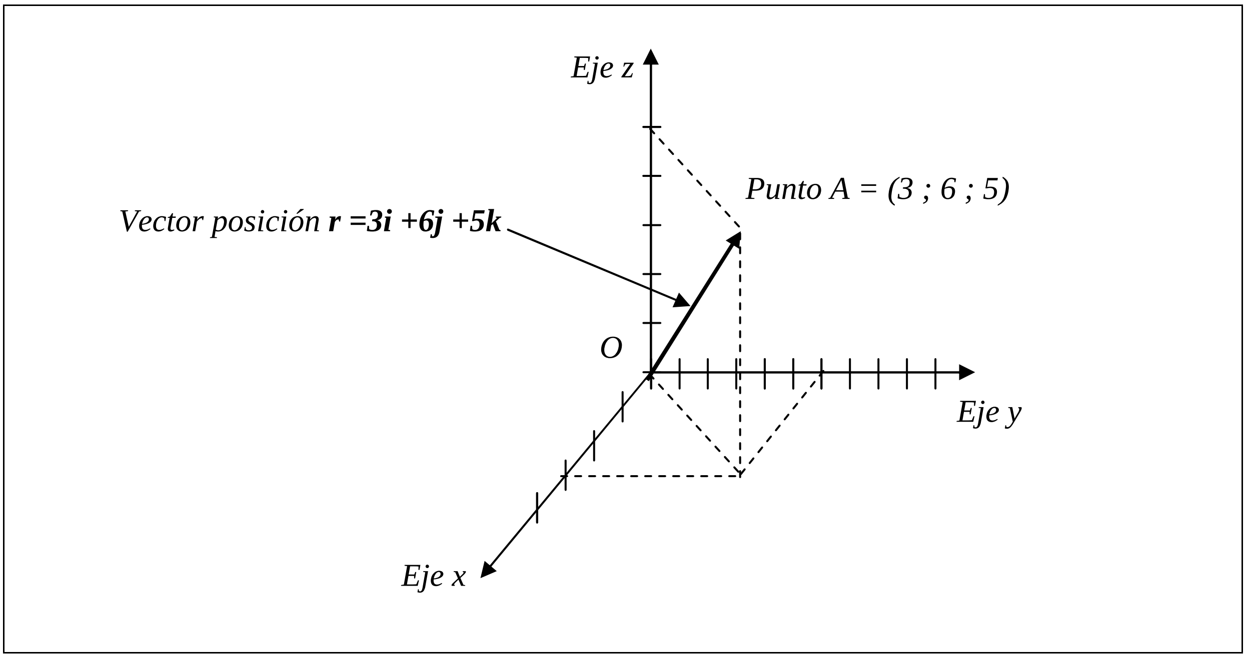
Donde *G* representa la constante de gravitación universal.
Para el caso de un cuerpo sobre la superficie de la tierra, la atracción gravitatoria se manifiesta en la fuerza peso que se denominará con la letra *W*, cuyo valor equivale a:

$$W = m \cdot g$$

siendo *g* la aceleración de la gravedad cuyo valor es $9{,}8 m/s^2$ en el Sistema Internacional.

CINEMÁTICA DEL PUNTO

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento, en este caso del punto, sin analizar las causas que producen ese cambio de posición.
Ahora bien, ¿cómo podemos determinar si ese punto está en movimiento o en reposo? o ¿cuándo decimos que un objeto se mueve? El concepto de movimiento tiene un significado relativo y para responder las preguntas anteriores es necesario definir un cuerpo de referencia respecto del cual se determinan los movimientos de los otros cuerpos.
A este cuerpo de referencia se lo idealiza como un sistema de coordenadas, esto es, una terna de ejes rígidos no coplanares, respecto de los cuales se refieren las coordenadas del punto analizado.
Existen diferentes tipos de coordenadas de las cuales utilizaremos las coordenadas cartesianas[14] en el espacio según se indica a continuación.



El vector posición *r* puede ser expresado de las siguientes maneras, a saber:

$$\vec{r} = r_x.\vec{i} + r_y.\vec{j} + r_z.\vec{k}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

La primera se denomina forma cartesiana, la segunda corresponde a la forma matricial.

CONCEPTO VECTORIAL DE VELOCIDAD

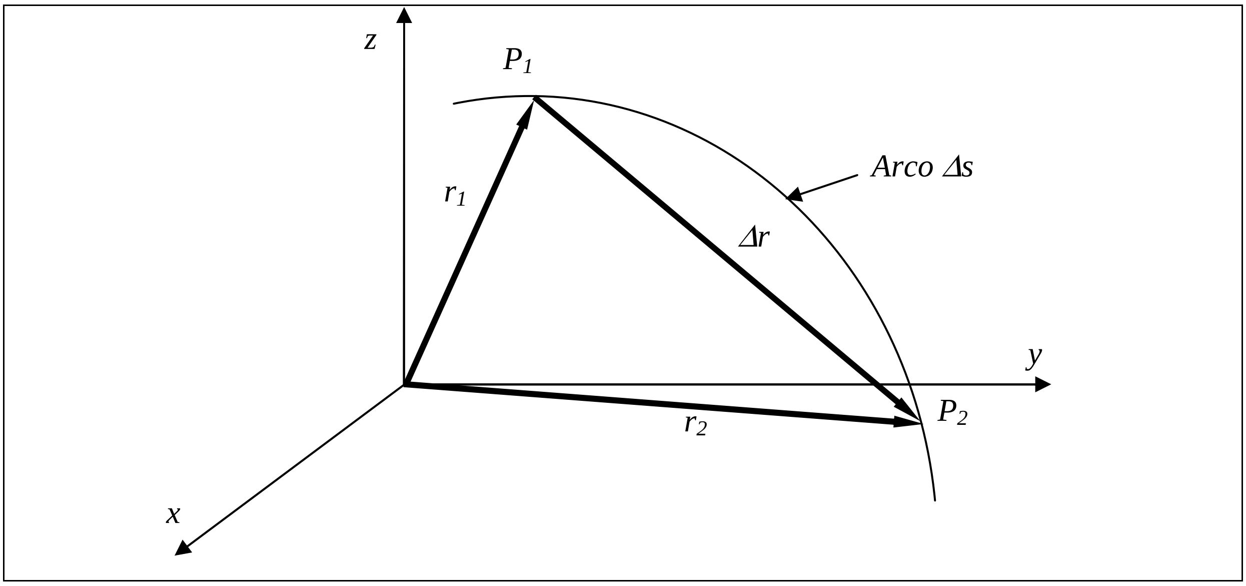
Existen movimientos donde la trayectoria[15] se encuentra prefijada de antemano, como por ejemplo: el movimiento de un cuerpo que cae verticalmente, el movimiento de una rueda, el de un tren sobre las vías, etc. dando lugar respectivamente a los movimientos rectilíneos, circulares y curvilíneos.

[14] En honor a René Descartes (1596-1650) matemático francés y uno de los fundadores de la geometría analítica.
[15] Se define trayectoria a las sucesivas posiciones de un cuerpo representado por un punto.

El movimiento a lo largo de una trayectoria estará definido si se conoce, en principio, la función de la posición respecto del tiempo.
Dada una trayectoria curvilínea recorrida por un punto, si se definen dos posiciones sucesivas del mismo, para dos instantes t_1 y t_2 como P_1 y P_2 mediante sus correspondientes vectores posición:

$$r_1 = x(t_1).\vec{i} + y(t_1).\vec{j} + z(t_1).\vec{k}$$
$$r_2 = x(t_2).\vec{i} + y(t_2).\vec{j} + z(t_2).\vec{k}$$

En el siguiente gráfico se representa, en un sistema cartesiano ortogonal, la situación planteada.



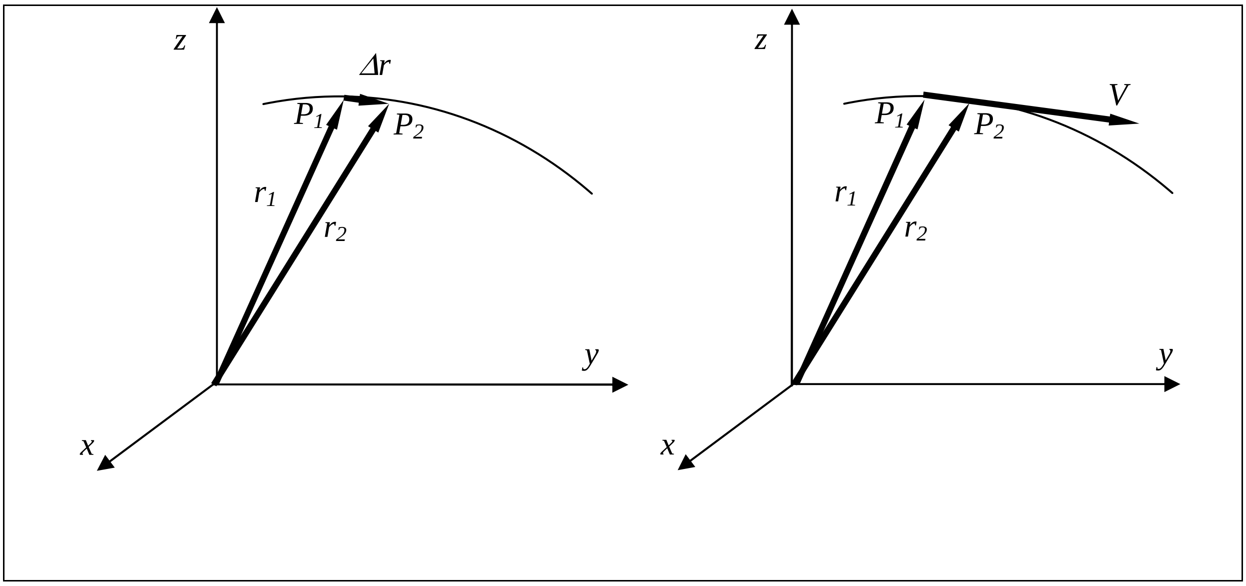
La diferencia vectorial $\boldsymbol{\Delta r = r_2 (t) - r_1 (t)}$ se denomina vector desplazamiento del punto desde P_1 hasta P_2 para el intervalo de tiempo establecido.
Se define como velocidad media al cociente entre el vector desplazamiento respecto del intervalo de tiempo correspondiente, que expresada en forma de ecuación queda:

$$v_{med} = \frac{r_2(t) - r_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

La velocidad media así definida no brinda mucha información entre los instantes t_1 y t_2, porque si en un instante intermedio el punto se detiene, la expresión no puede brindar esa información.
El signo del divisor será siempre positivo mientras que el del numerador podrá ser tanto positivo, negativo o cero.
Si se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños, el punto P_2 se aproximará a P_1 y el vector desplazamiento tiende a confundirse con la trayectoria curva. Concretamente Δr tiende a confundirse con la distancia Δs recorrida sobre la curva.
Por último, si se tiende al límite cuando el incremento de tiempo tienda a cero, la velocidad media se transforma en instantánea de acuerdo a la expresión:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

En el siguiente gráfico se puede observar la relación que existe entre el vector desplazamiento y el vector velocidad instantánea.



El sentido del vector velocidad instantánea *V* coincide con el sentido del movimiento sobre la trayectoria. Es correcto por lo tanto considerar la velocidad como un ente vectorial, ya que solo con un número no basta para describir completamente el movimiento en el espacio; no se puede decir que el móvil se mueve a poca o mucha velocidad, es necesario además indicar hacia donde se dirige.
Para el caso de un movimiento rectilíneo, el vector velocidad se encuentra sobre la recta que define la trayectoria.

Para pensar
Qué diferencia poseen los vectores desplazamiento y velocidad si el intervalo de tiempo es mayor, menor o igual a la unidad de tiempo, por ejemplo, 1 segundo.

CONCEPTO DE ACELERACIÓN MEDIA

Este concepto se relaciona directamente con el comportamiento de la velocidad. Por ejemplo, si un móvil mantiene la misma velocidad a medida que transcurre el tiempo es diferente a que su velocidad aumente instante a instante, esa razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo se define como aceleración media:

$$a_{med} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

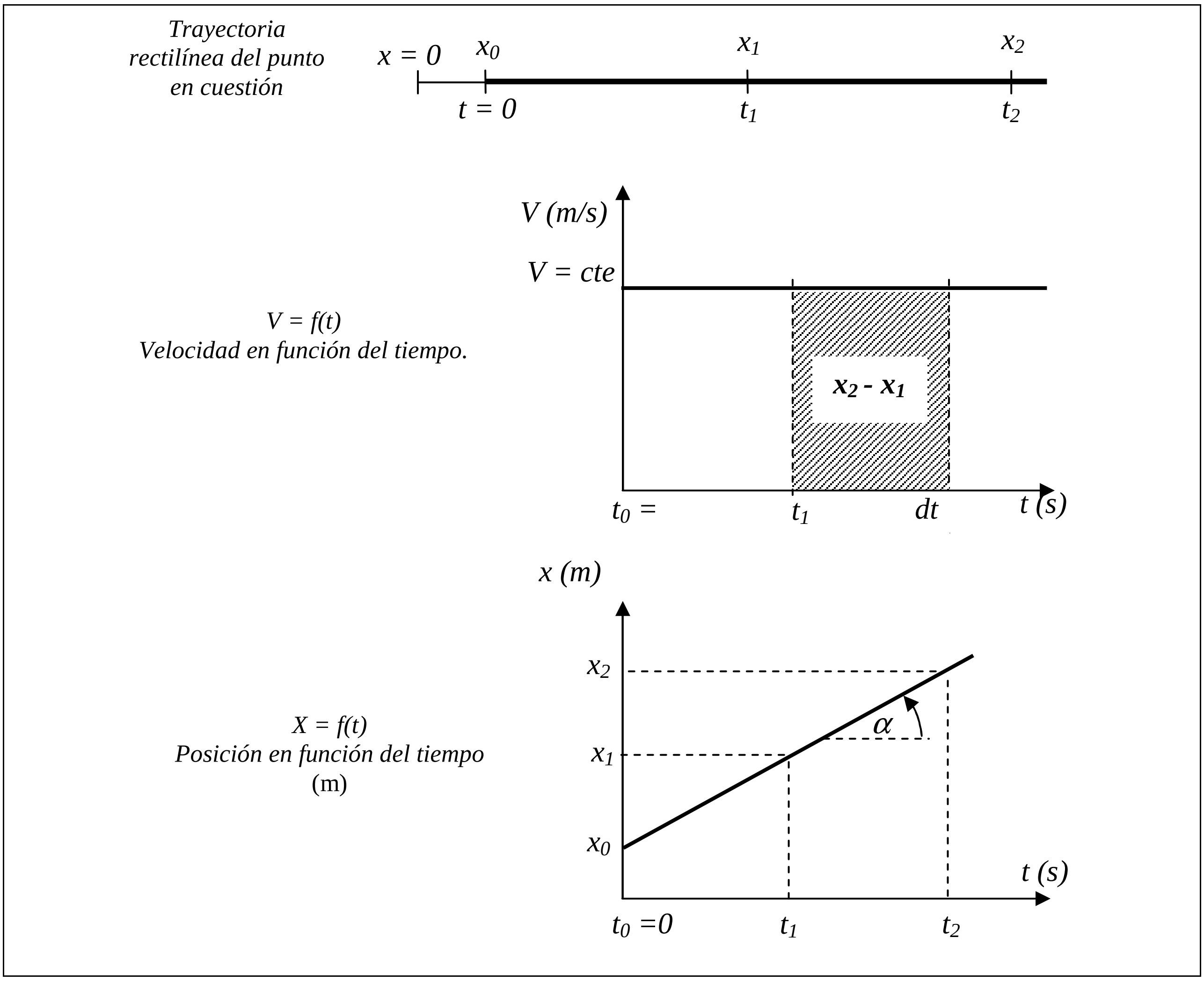
La aceleración se tornará instantánea cuando el intervalo de tiempo tienda a cero similar al procedimiento utilizado para la determinación de la velocidad instantánea.
Si el incremento de velocidad es positivo, también lo será la aceleración y significa que la velocidad va en aumento a medida que transcurre el tiempo. Si por el contrario, el incremento de velocidad resulta negativo significa que la velocidad final es menor que la inicial respecto al incremento de tiempo considerado, por lo que el movimiento será desacelerado.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Si se considera un punto que se mueve a lo largo de una recta, se define como movimiento rectilíneo uniforme a aquel en el cual la velocidad permanece constante sobre la trayectoria rectilínea.
Por lo tanto la relación entre desplazamientos recorridos y los tiempos empleados en recorrerlos tendrá el mismo valor y corresponderá a la velocidad. La expresión de la velocidad para este caso estará dada por:

$$V_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Siendo x_2 la posición final del punto conseguido en el instante final t_2 respecto de la posición inicial x_1 para su correspondiente instante inicial t_1.
Dado que la velocidad es una proporción constante, tanto la velocidad media como la instantánea coinciden exactamente.
A continuación se grafica la trayectoria, la velocidad y la posición respecto del tiempo[16]:



Un aspecto importante es la definición de la referencia respecto del cual se medirán las posiciones.
Por ejemplo: en la gráfica de la posición en función del tiempo, el móvil para el instante $t = 0$ se encuentra a una distancia del origen de x_0 unidades de longitud. A partir de esa posición inicial

[16] Nótese que los ejes de los tiempos coinciden para los gráficos de $V = f(t)$ y $s = f(t)$.

se cuentan tanto los tiempos como las posiciones. Por ejemplo: para el instante de tiempo $t = t_1$, el móvil se encuentra a una distancia x_1 respecto de la referencia $x = 0$.
La utilización del gráfico de la velocidad en función del tiempo es una herramienta valiosa a la hora de resolver ejercicios. Por ejemplo, si se conoce la velocidad V del móvil y los instantes t_1 y t_2, el área sombreada entre esos dos instantes resulta:

$$x_2 - x_1 = V \cdot (t_2 - t_1)$$

Esta diferencia entre las posiciones final e inicial corresponde al desplazamiento del punto para el intervalo de tiempo considerado.
Analizando el intervalo de tiempo entre $t_0 = 0$ y $t = t_1$ se observa una diferencia de x_0 unidades de longitud que depende de la referencia inicial definida arbitrariamente.
De esta última expresión se puede determinar la posición x del punto para cualquier instante t respecto del origen de referencia dada por:

$$x = x_0 + V \cdot (t - t_0)$$
$$x = x_0 + V \cdot t$$

Todo lo anterior puede observarse en el eje de las ordenadas del gráfico de la posición en función del tiempo, resaltando una característica importante, la pendiente de la recta representa la velocidad de la partícula[17].

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

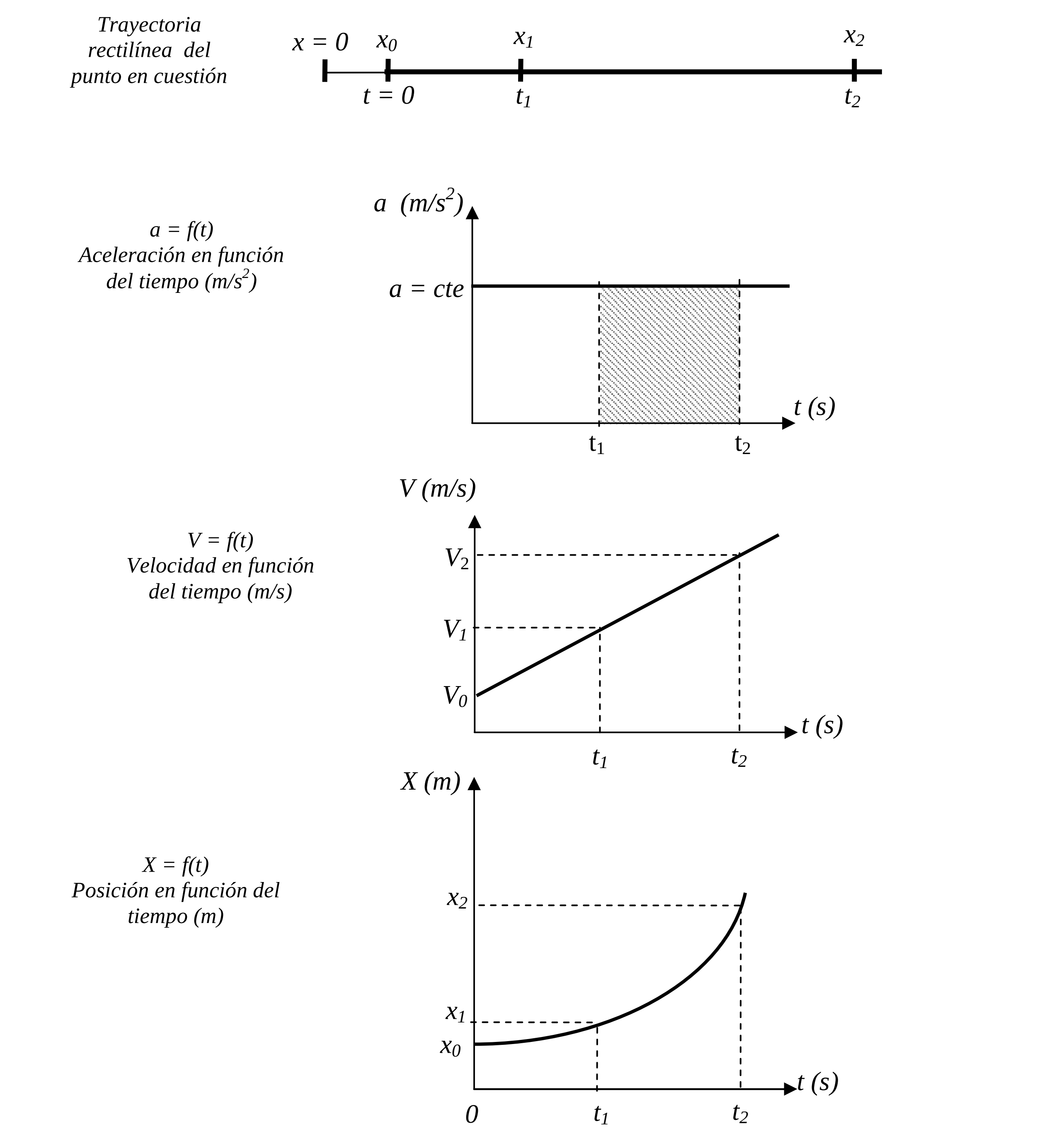
Aquí lo que se mantiene constante es la aceleración de la partícula, es decir, la razón entre el incremento de velocidad respecto del incremento de tiempo en que se ella se produce y está dada por la ecuación:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

Este cociente puede ser mayor o menor que cero dependiendo de la variación de la velocidad, si esta disminuye a cada instante, la aceleración resultará de signo contrario al definido positivo para la velocidad, según se analizó al desarrollar el concepto vectorial de esta magnitud.
Dado que la aceleración es una proporción constante, para este tipo de movimiento tanto la aceleración media como la instantánea serán exactamente las mismas.
Si se grafican la trayectoria rectilínea, la aceleración, la velocidad y la posición respecto del tiempo se tendrá:

[17] Se debe tener en cuenta las escalas de cada uno de los ejes coordenados para que la tangente del ángulo corresponda a la velocidad. La ecuación correcta para obtener gráficamente el valor de la velocidad es:

$$V = tg\alpha = \frac{\Delta s / ESCs}{\Delta t / ESCt}$$



Analizando el gráfico de la aceleración en función del tiempo (el cual da el nombre a este tipo de movimiento) se tiene que el área sombreada representa el cambio de velocidad que experimentó el móvil entre t_1 y t_2 y está dada por la expresión:

$$V_2 - V_1 = a \cdot (t_2 - t_1)$$

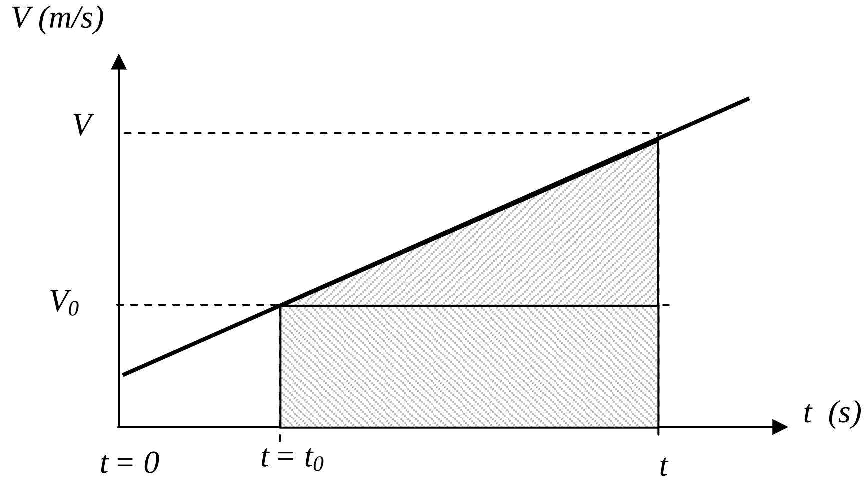
Esta misma expresión se obtiene despejando ΔV de la definición de aceleración media.
En forma genérica, la velocidad V en cualquier instante t estará dada por:

$$V - V_0 = a \cdot (t - t_0) \rightarrow V = V_0 + a \cdot (t - t_0)$$

Se puede notar además en el gráfico de $X = f(t)$ que, para $t = 0$ se tiene una posición inicial X_0 definida arbitrariamente de acuerdo a la referencia respecto a la cual se medirán los mismos.

ECUACIÓN HORARIA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Para determinar la ley de variación del espacio recorrido en función del tiempo se analiza el movimiento a partir del instante $t = t_0$ instante inicial en el que el móvil posee una velocidad inicial V_0.
Observando el siguiente gráfico, el área sombreada bajo la curva de $V = f(t)$ da como resultado el desplazamiento para un intervalo de tiempo definido.



El área sombreada se puede separar en dos partes, un rectángulo más un triángulo (indicados con rayados diferentes). Esto se expresa como:

$$x - x_0 = v_0.(t - t_0) + \frac{(v - v_0).(t - t_0)}{2}$$

Sabiendo que la pendiente de la recta corresponde a la aceleración, se tiene:

$$a = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} \Rightarrow (v - v_0) = a.(t - t_0)$$

Reemplazando en la primera expresión quedará:

$$x - x_0 = v_0.(t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

O también como:

$$x = x_0 + v_0.(t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

La posición que tendrá el punto en el instante t genérico será X y corresponderá al área total sombreada.

Para el caso en que el tiempo considerado como inicial $t_0 = 0$, la expresión se convierte en:

$$x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Se puede presentar otra expresión de la posición en función del tiempo según se muestra a continuación:

$$x - x_0 = v_0.(t - t_0) + \frac{(v - v_0).(t - t_0)}{2}$$
$$x - x_0 = v_0.(t - t_0) + \frac{v.(t - t_0) - v_0.(t - t_0)}{2}$$
$$x - x_0 = \frac{v_0.(t - t_0)}{2} + \frac{v.(t - t_0)}{2}$$

$$x - x_0 = \frac{.(v_0 + v).(t - t_0)}{2}$$

Muchas veces es útil la expresión en la que no aparece la variable tiempo, la cual se deduce de la definición de aceleración de la siguiente manera:
como se sabe que la aceleración es constante, se puede tomar un cociente de incrementos, dado por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

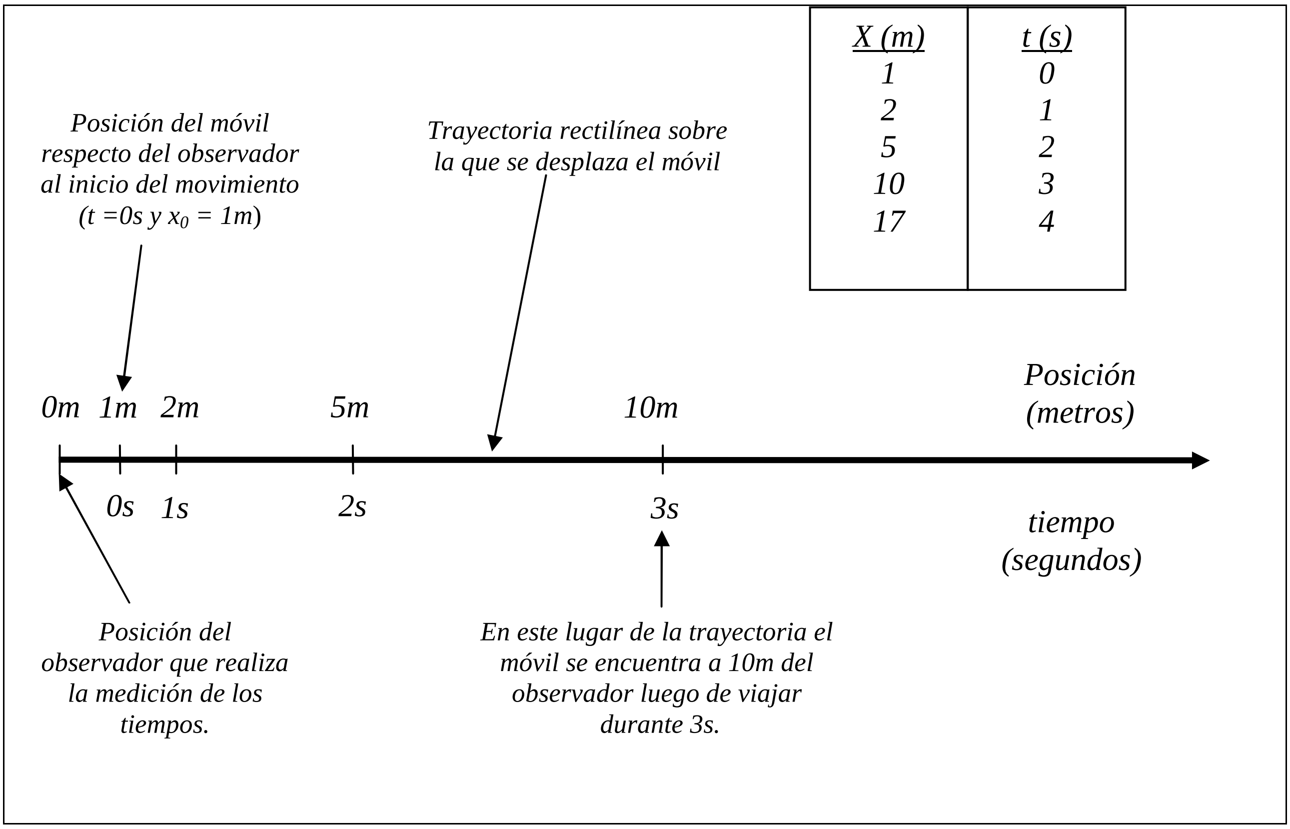
Multiplicando y dividiendo la expresión por el incremento de espacio recorrido en ese tiempo y operando algebraicamente, se tiene:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot Vmed$$
$$a = \frac{(Vf - Vo)}{\Delta x} \cdot \frac{(Vf + Vo)}{2}$$
$$a = \frac{Vf^2 - Vo^2}{2.\Delta x}$$

$$Vf^2 - Vo^2 = 2.a.\Delta x$$

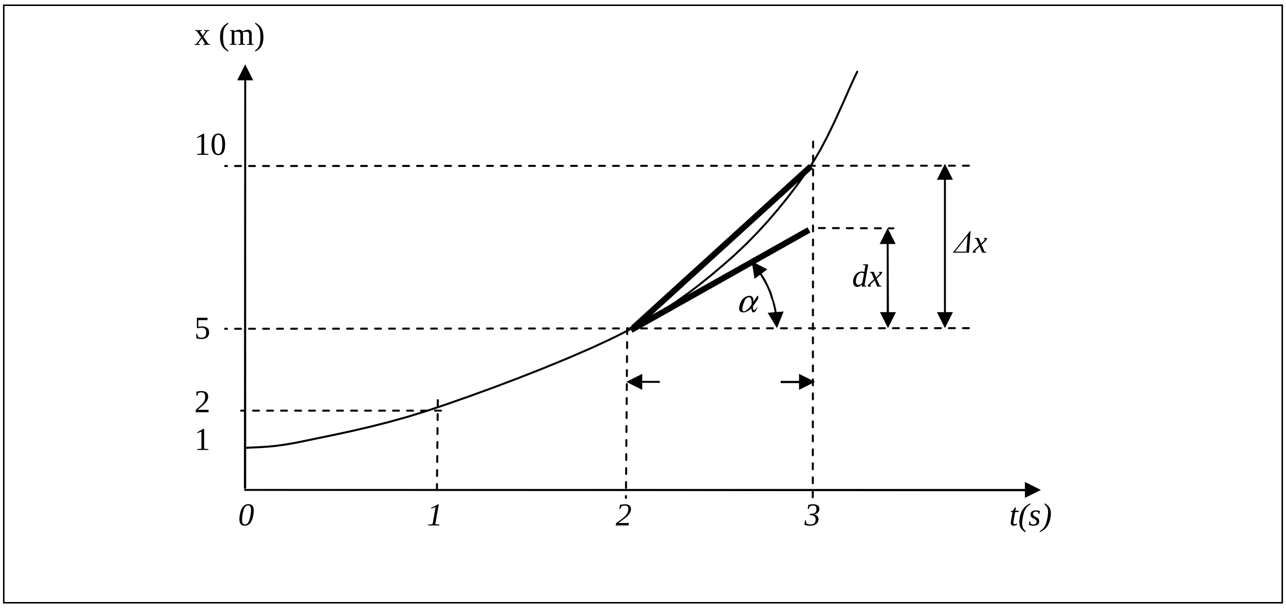
Si se utiliza el concepto del cálculo diferencial e integral se llega al mismo resultado según se muestra en el ANEXO II.

A continuación se ejemplifica un caso de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado donde se tomaron cinco datos de posición y tiempo medidos por un observador ubicado en la posición x=*0m*.



X (m)	*t (s)*
1	*0*
2	*1*
5	*2*
10	*3*
17	*4*

En el esquema de arriba es imposible visualizar la ley de variación de la posición en función del tiempo. Si por el contrario estos mismos valores se representan en un par de ejes cartesianos se tendrá la función *x= f(t)* según se muestra en la siguiente figura.



Es importante resaltar la forma en que se realizó el experimento para determinar esta curva. Para comenzar, el observador se encuentra ubicado al momento de comenzar a cronometrar los tiempos, a una distancia de *1m* del lugar en el que se encuentra detenido el móvil. Esto se detecta en el gráfico mediante la pendiente de la recta tangente a la curva en *t = 0s.*

Entre los instantes $t = 2$ y $t = 3$, el móvil se trasladó con una velocidad, media dada por:

$$Vmed = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10-5}{3-2} = 5m/s$$

La velocidad instantánea que posee el móvil en $t = 2$ se determina mediante la pendiente de la recta tangente en dicho instante y se determina mediante el cociente de diferenciales:

$$V = \frac{dx}{dt}$$

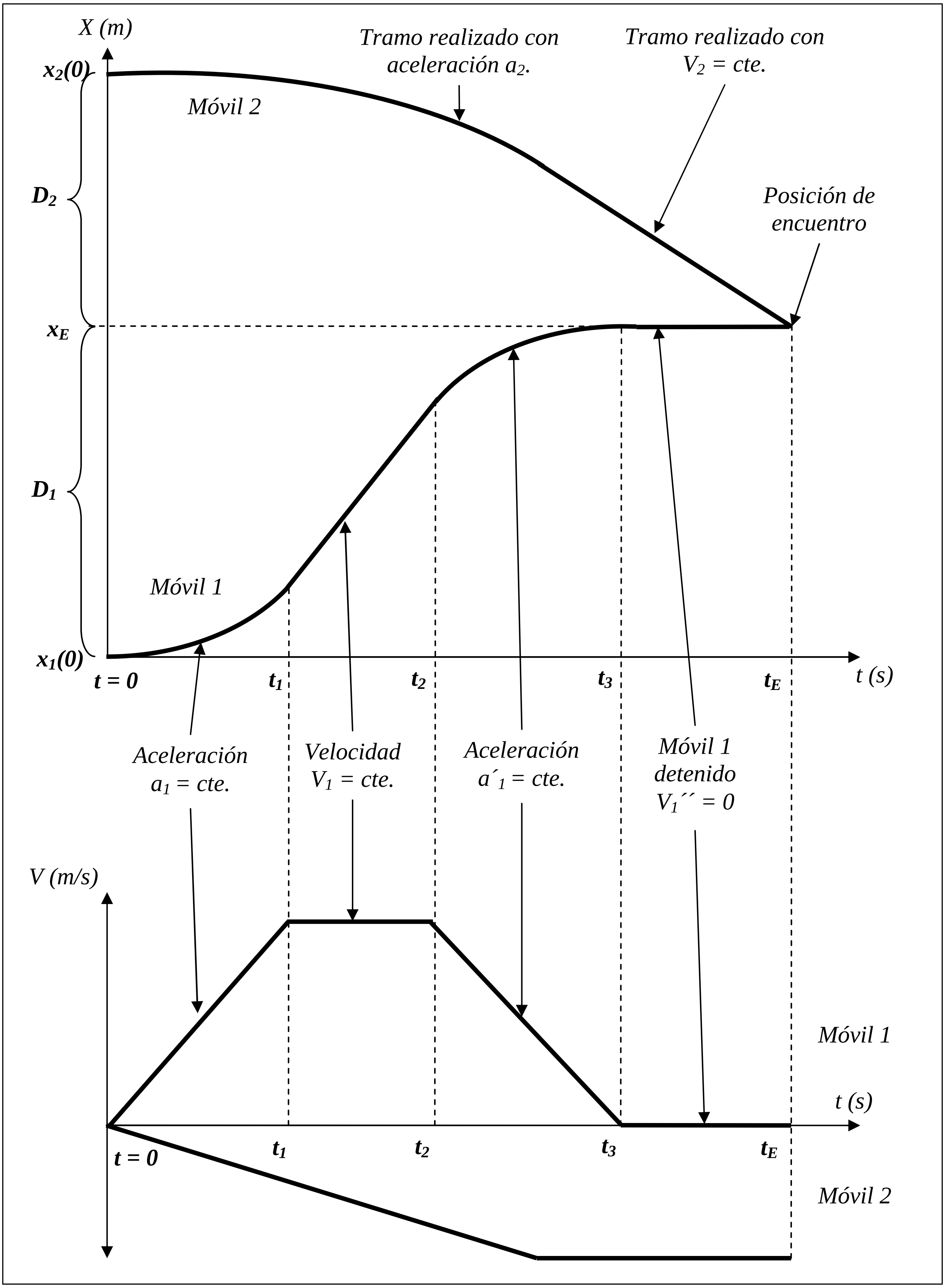
Para determinar directamente del gráfico la velocidad instantánea, es necesario utilizar exactamente las mismas escalas en ambos ejes coordenados, para que se cumpla:

$$V = tg\alpha$$

En el caso del esquema de más arriba, esto no se cumple debido a que una división del eje de tiempos equivale, aproximadamente, a 5 unidades del eje de los espacios.

ENCUENTRO ENTRE DOS MÓVILES

Uno de los problemas de cinemática es el de encuentro entre dos móviles. Para que este se produzca, es necesario que ambos móviles tengan la misma posición en el mismo tiempo. A pesar de que esto parece obvio, existen casos en que el móvil presenta diferentes estados de movimiento sobre la misma trayectoria, pudiendo estar a velocidad constante durante un determinado intervalo de tiempo, luego detenerse, avanzar aceleradamente, regresar, etc.
A continuación se analizará directamente en forma gráfica el encuentro de dos móviles que se trasladan de manera que sus trayectorias comparten la misma recta, presentando diferentes situaciones a fin de presentar el caso más general posible.



La característica principal de los gráficos es que poseen el mismo eje de tiempos, por lo que pueden compararse los eventos de ambos móviles simultáneamente y las líneas verticales trazadas solo para el *Móvil 1* indican los instantes en que se produjeron los cambios en el estado del movimiento.

Otras características se deben tener presentes.

Para el gráfico de la posición en función del tiempo:

- ✓ las aceleraciones a_1 y a'_1 corresponden respectivamente a la aceleración y frenado realizados en forma constante por el *Móvil 1*.
- ✓ El *Móvil 2* acelera hasta conseguir una velocidad final que mantiene hasta el momento del encuentro.
- ✓ Ambos móviles parten con velocidad inicial cero pero de diferentes posiciones. Se evidencia este hecho por tener en ese instante tangente horizontal.

Para el gráfico de la velocidad en función del tiempo:

- ✓ si no se informa específicamente, con este gráfico no se podría determinar si ambos móviles se encuentran en la misma posición en el instante $t = 0$.
- ✓ Ambos móviles parten con velocidades diferentes en módulo y sentido ya que la dirección está determinada por la recta que transitan.
- ✓ Para un determinado intervalo de tiempo, el área bajo la curva determina el espacio recorrido por el móvil y corresponde matemáticamente a la integral.
- ✓ El *Móvil 1* avanza hacia el *Móvil 2* con una velocidad que se definió arbitrariamente positiva.
- ✓ El *Móvil 2* siempre avanza hacia el *Móvil 1* con una velocidad que se debe tomar negativa pues ya que definió arbitrariamente el signo en el otro móvil y debe respetarse esta convención a fin de que matemáticamente sean coherentes las expresiones y se pueda determinar el lugar y tiempo de encuentro.
- ✓ Para determinar las expresiones de la posición en función del tiempo de cada móvil se debe tener presente que estos recorren los tramos con diferentes tipos de movimiento.

Como ejemplo se determinará la ecuación horaria[18] solo para el Móvil 1.

TRAMO 0 - $\boldsymbol{t_1}$

Posición:

$$x = x_0 + v_0.(t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

$$x = 0 + 0 \cdot (t - 0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - 0)^2$$

$$x = +\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t)^2$$

La posición final:

$$x_1 = +\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1)^2$$

Velocidad:

$$V - V_0 = a \cdot (t - t_0)$$

$$V - 0 = a \cdot (t - 0)$$

$$V = a \cdot (t)$$

Velocidad final:

$$V_1 = a \cdot (t_1)$$

[18] En algunas bibliografías se define así a la ecuación de la posición en función del tiempo.

TRAMO t_1- t_2

Posición:

$$x = x_1 + v_1.(t - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_1)^2$$

Posición final:

$$x_2 = x_1 + v_1.(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_2 - t_1)^2$$

Velocidad:

$$V = V_1 + a \cdot (t - t_1)$$

Velocidad final:

$$V_1' = V_1 + a \cdot (t_2 - t_1)$$

TRAMO t_2- t_3

Posición:

$$x = x_2 + v_1'.(t - t_2) + \frac{1}{2} \cdot a_1' \cdot (t - t_2)^2$$

Posición final:

$$x_3 = x_2 + v_1'.(t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \cdot a_1' \cdot (t_3 - t_2)^2$$

Velocidad:

$$V - V_1' = a_1' \cdot (t - t_2)$$

Velocidad final:

$$V_1'' = V_1' + a_1' \cdot (t_3 - t_2) = 0$$

TRAMO t_3- t_E

Posición:

$$x = x_3 + V_1''.(t - t_3) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_3)^2$$

Posición final:

$$x_E = x_3$$

Dado que tanto la velocidad como la aceleración en ese tramo valen cero.

Velocidad:

$$V = V_1'' + a_1'' \cdot (t - t_3)$$

Velocidad final:

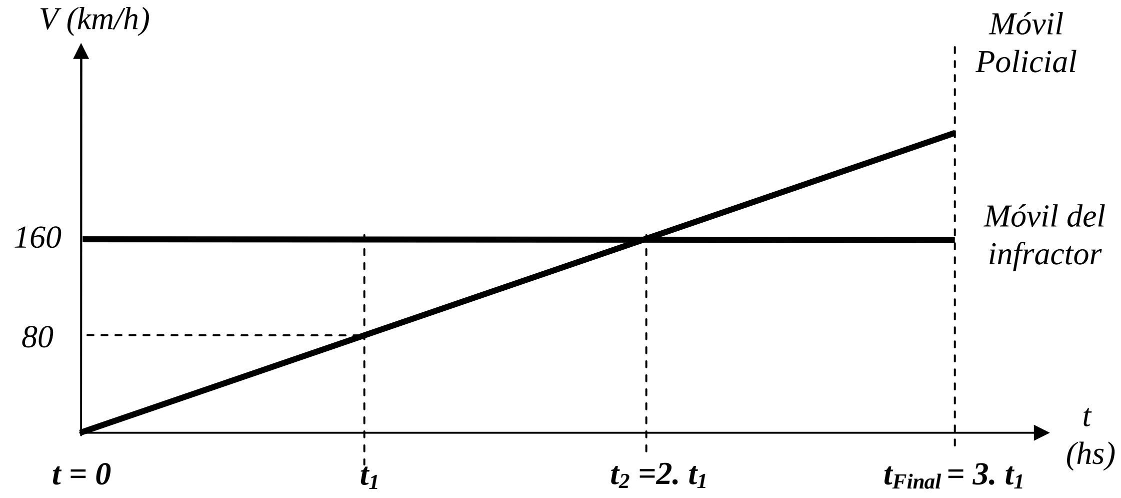
$$V_E = V_1'' + a_1'' \cdot (t_E - t_3)$$

Dado que tanto la velocidad como la aceleración en ese tramo valen cero, queda:

$$V_E = V_1''$$

Como se podrá observar, la posición y la velocidad final de un tramo corresponden a la posición y velocidad inicial del tramo inmediato siguiente.
Se resalta un aspecto importante, en este ejemplo el encuentro se produjo en el tramo ***t_3- t_E*** pero, en general, se debe determinar en qué tramo se produce el encuentro analizando las posiciones sucesivas de cada uno de los tramos de los móviles intervinientes y si se produce o no el encuentro. De no producirse, se continuará el análisis del tramo siguiente hasta lograr determinar la posición y tiempo de encuentro.

Para pensar
El siguiente gráfico muestra las velocidades de un móvil policial y un automovilista que pasó un semáforo en rojo. Con los datos que se muestran, ¿se puede determinar si el oficial de policía logró interceptar al infractor en el tiempo final que se indica? Confeccionar las correspondientes gráficas de la posición en función del tiempo para los dos móviles y analizar.

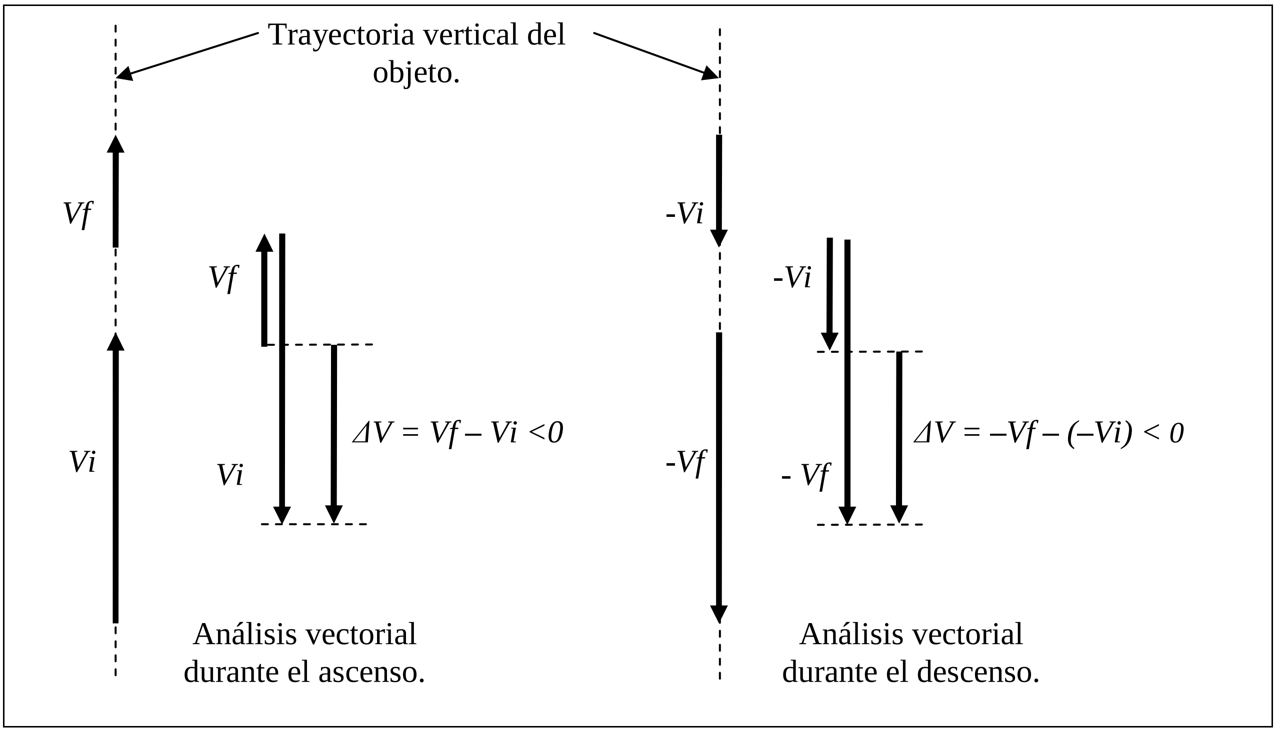


TIRO VERTICAL

Se produce cuando un cuerpo es lanzado verticalmente con velocidad inicial en la dirección vertical (eje *y*) las expresiones de la posición, velocidad y aceleración del cuerpo, serán:

$$y = y_0 + V_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad Vy = V_0 - g \cdot t \qquad a_y = -g$$

Si el tiro vertical se iniciara con una velocidad hacia abajo, el signo de esta deberá considerarse negativo de acuerdo a la convención de signos utilizada.
Finalmente, para aclarar el signo de la aceleración se esquematizan dos situaciones de un mismo tiro vertical hacia arriba de un objeto tomando el mismo intervalo de tiempo Δt. Para el análisis se definen como positivos todos aquellos vectores que se encuentren dirigidos hacia arriba.



Si se aplica el concepto de aceleración a este tipo de movimiento, se obtienen los mismos valores en ambas situaciones coincidiendo con la realidad: la aceleración de la gravedad es la misma en todo instante y para el caso analizado, está representada por un vector negativo, de módulo 9,81 y sus unidades en el Sistema Internacional es m/s^2.

CAÍDA LIBRE

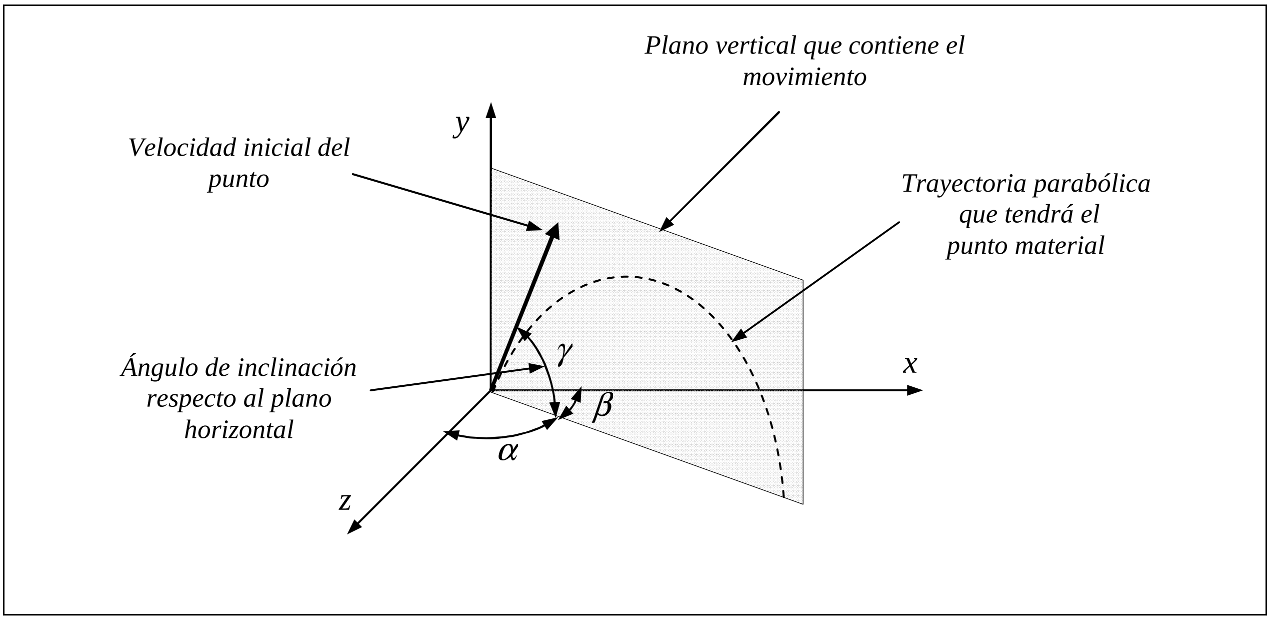
En este caso particular el objeto se deja caer, es decir se lo libera sin imprimirle ninguna velocidad desde una posición inicial ($y = y_0$) y las expresiones de la posición, velocidad y aceleración del cuerpo, serán:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad Vy = -g \cdot t \qquad a_y = -g$$

Para pensar
Se informa de un accidente donde a un peatón que caminaba por la vereda le cayó un objeto en la cabeza. La pericia policial trata de ubicar el piso desde el cual partió el objeto para determinar el culpable. Se cuenta con un testigo que vive en el tercer piso que vio pasar el objeto. Informa que tardó 0,1 segundos en recorrer los tres metros que mide el ventanal del frente. Si cada piso posee el mismo ventanal, ¿podrá la policía determinar desde que piso se dejó caer el objeto?

MOVIMIENTO PLANO DE PROYECTILES

Se refiere al movimiento de proyectiles en las proximidades de la superficie terrestre contenidos en un plano vertical donde se estudiará el movimiento cuando se los dispara con ángulos de inclinación dados por el ángulo γ según muestra la figura.



Los ángulos α y β solo son utilizados para posicionar el plano vertical.
Analizando cinemáticamente el movimiento del proyectil, se tendrá que las aceleraciones en cada una de las direcciones de los ejes cartesianos serán:

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$
$$a_z = 0$$

Se deduce entonces que las expresiones de las componentes de la velocidad correspondientes a cada una de las direcciones serán:

$$Vx = V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\beta = cte$$
$$Vy = V_0 \cdot sen\gamma - g \cdot t$$
$$Vz = V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha = cte$$

De aquí se desprende que la posición en función del tiempo para cada una de las correspondientes direcciones estarán expresadas por:

$$x = x_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot t$$
$$y = y_0 + V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$
$$z = z_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Cabe resaltar que estas expresiones se refieren al caso general de un tiro oblicuo que se efectúa partiendo de una posición inicial (para $t = 0$) dada por el vector posición (x_0 ; y_0 ; z_0). En la figura anterior el movimiento parte del origen de coordenadas.

De esta expresión general se pueden analizar casos particulares que se analizarán a continuación considerando que el plano vertical que contiene el movimiento es el plano *x-y*, quedando las expresiones:

$$x = x_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot t$$

$$y = y_0 + V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$Vx = V_0 \cdot \cos\gamma = cte$$

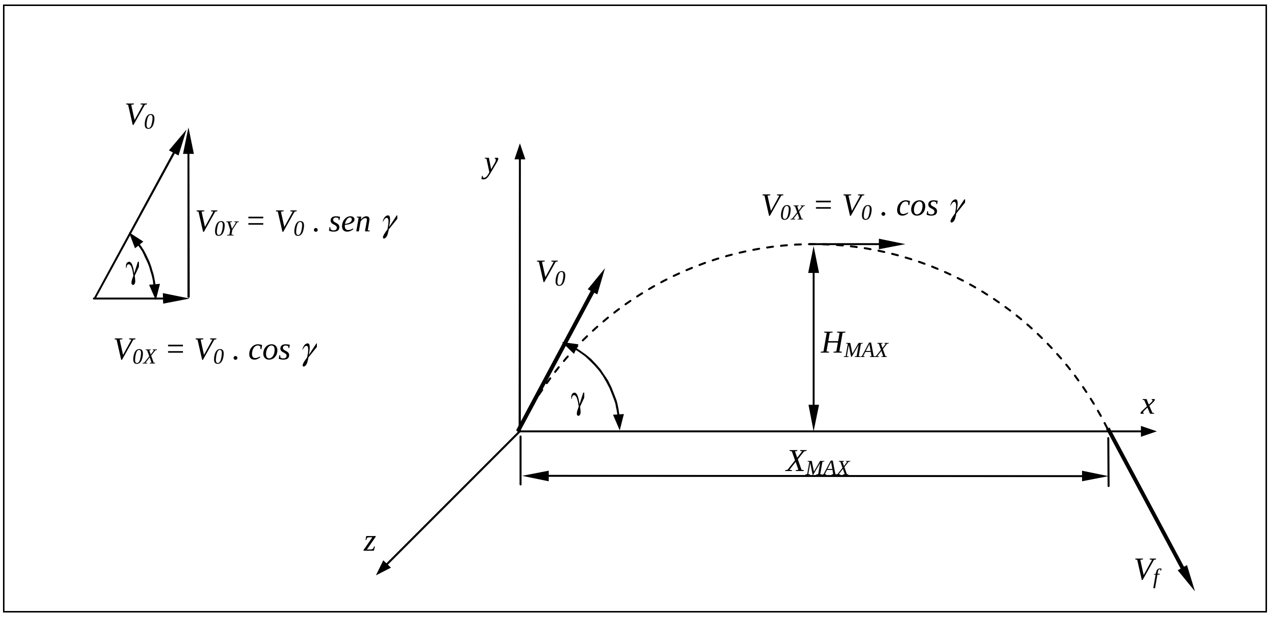
$$Vy = V_0 \cdot sen\gamma - g \cdot t$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

ALTURA MÁXIMA

Si se realiza un tiro oblicuo con velocidad inicial V_0, un ángulo de inclinación γ según se indica en el esquema, llegará un momento en que el objeto no seguirá elevándose con lo que obtendrá la altura máxima H_{MAX} para la cual la velocidad en la dirección del eje "*y*" (dada por *Vy*) será nula según se indica en la figura que para facilitar su utilización se hace $\beta = 0$.



De esta condición se desprende que:

$$V_{0X} = V_0 \cdot \cos\gamma$$

$$Vy = V_0 \cdot sen\gamma - g \cdot t = 0$$

$$Vz = 0$$

El instante en que esto ocurre se determina despejándolo de la expresión anterior y vale:

$$t = \frac{V_0 \cdot sen\gamma}{g}$$

Para determinar el valor de la altura máxima se reemplaza este valor del tiempo en la expresión de la posición en función del tiempo, quedando:

$$H_{MAX} = V_0 \cdot sen\gamma \cdot \left(\frac{V_0 \cdot sen\gamma}{g} \right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0 \cdot sen\gamma}{g} \right)^2$$

$$H_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0 \cdot sen\gamma}{g} \right)^2 = \frac{1}{2g} V_0^{\ 2} \cdot sen^2\gamma$$

Se resalta que esta expresión es válida solamente para el caso graficado donde la altura inicial vale cero.
Para el caso de que exista una altura inicial, la altura máxima se determina sumándole a la expresión anterior esta cantidad inicial:

$$H_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0 \cdot sen\gamma}{g} \right)^2 + y_0 = \frac{1}{2g} V_0^{\ 2} \cdot sen^2\gamma + y_0$$

ALCANCE MÁXIMO

Para determinar el alcance máximo X_{MAX} (distancia desde donde se dispara hasta el lugar donde toca el suelo, medido en forma horizontal) que puede conseguir un proyectil con las condiciones iniciales de altura inicial $y_0 = 0$, se parte del hecho que, en el instante que "toca el suelo" la posición final de este corresponde a $y = 0$. Reemplazando los correspondientes valores en la componente vertical de la posición, quedará:

$$y = y_0 + V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = 0 + V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = \left(V_0 \cdot sen\gamma - \frac{1}{2} g \cdot t \right) \cdot t$$

Esta última expresión resulta nula para dos instantes de tiempo diferentes, uno correspondiente al inicio del movimiento si es que partió "desde el suelo" y el otro se obtiene de igualar a cero el paréntesis de más arriba y despejar el tiempo. Finalmente queda:

$$t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\gamma}{g}$$

Reemplazando este tiempo en la expresión de la componente horizontal "x", quedará:

$$x = x_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot t$$

$$X_{MAX} = 0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \left(\frac{2 \cdot V_0 \cdot sen\gamma}{g} \right)$$

$$X_{MAX} = \frac{2 \cdot V_0^{\ 2} \cdot sen(2\gamma)}{g}$$

Para el caso de que exista una altura inicial, el alcance máximo se determina primero específicamente el tiempo en el que toca el suelo (y = 0) y luego se remplaza este valor en la expresión de la posición horizontal.

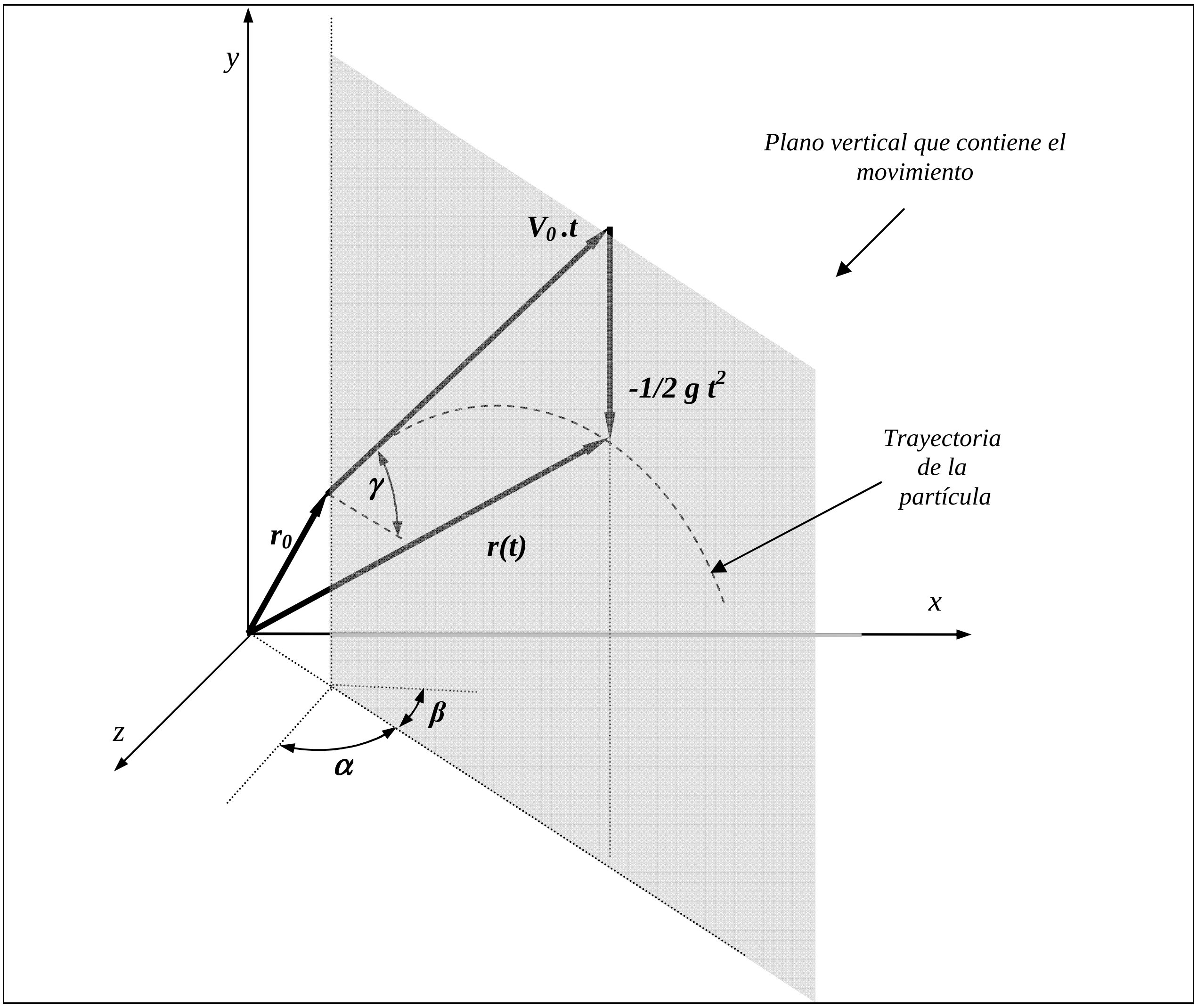
La expresión de la posición correspondiente al tiro oblicuo de un proyectil puede ser presentada en forma más compacta y general utilizando la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot t \\ y_0 + V_0 \cdot sen\gamma \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ z_0 + V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot t \end{pmatrix}$$

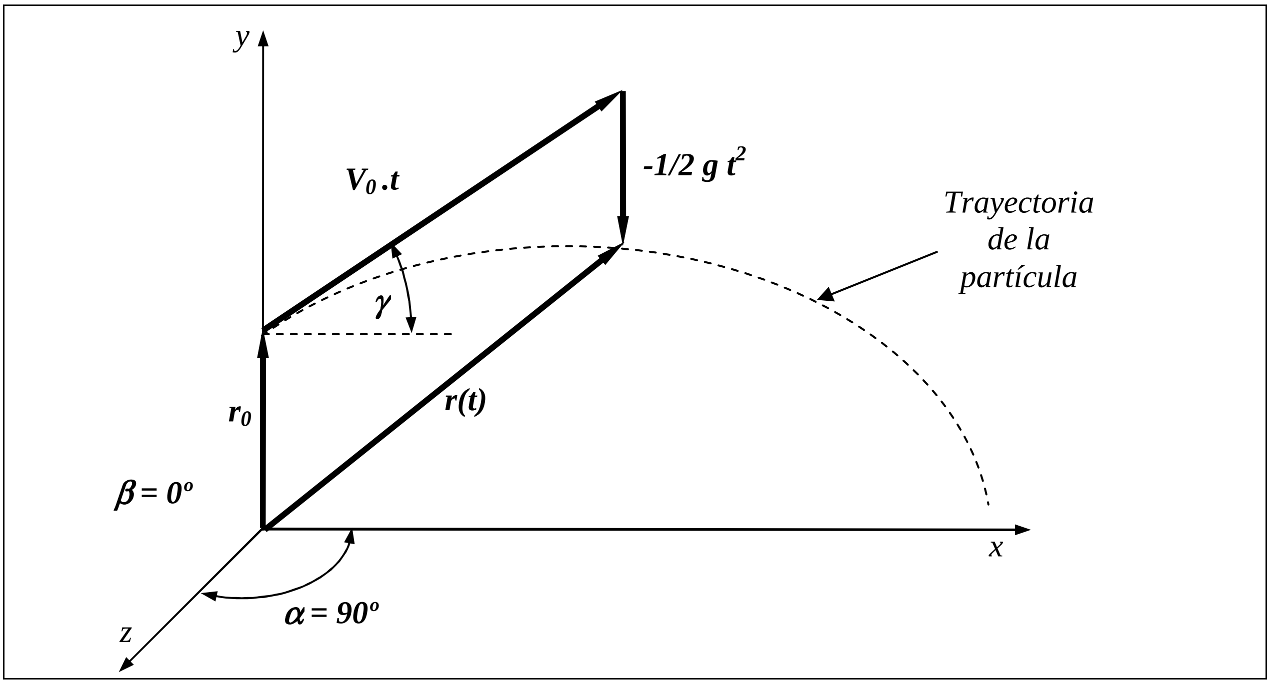
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\beta \\ V_0 \cdot sen\gamma \\ V_0 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} g \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{V_0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$$

Este vector posición para un proyectil en un punto genérico de su trayectoria quedará como la suma de tres vectores según se muestra en la siguiente figura:

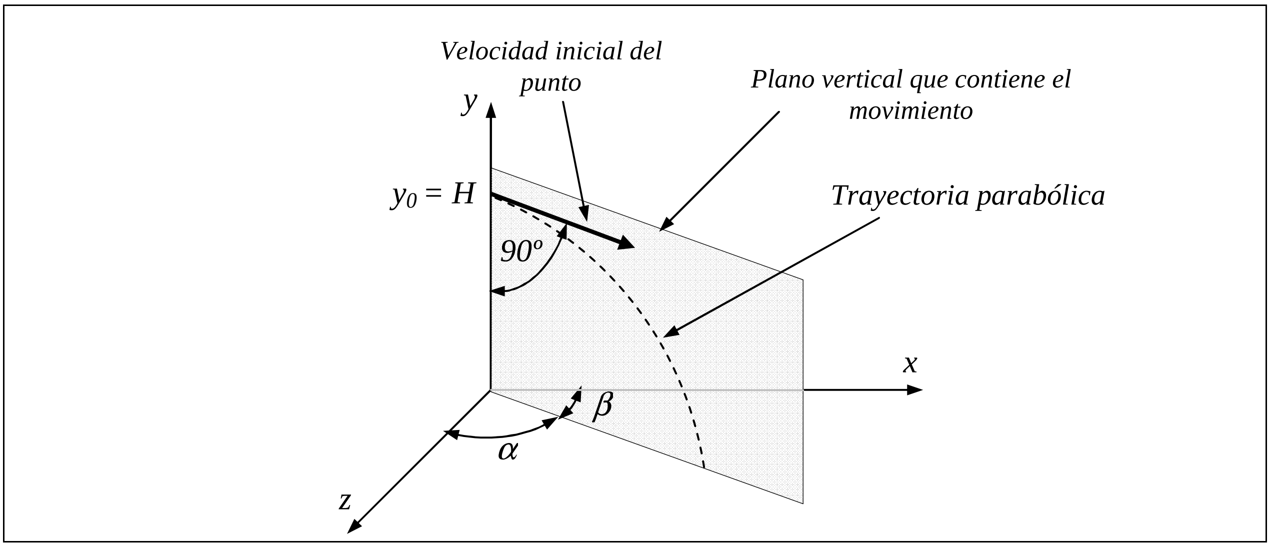


Para simplificar la expresión se hace coincidir el plano del movimiento con el plano "x-y" quedando:

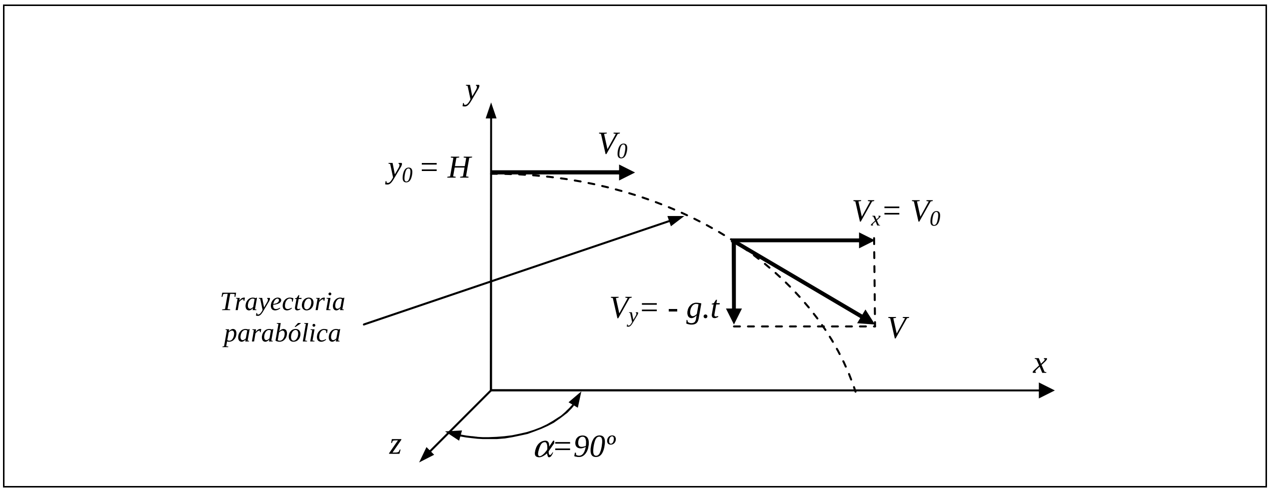


TIRO HORIZONTAL

El esquema de este tipo particular de tiro oblicuo se representa en la siguiente figura donde el objeto se lanza con velocidad inicial horizontal ($\gamma = 0$) y desde la altura inicial H.



Para facilitar la visualización del movimiento, se puede ubicar el plano vertical de manera que el ángulo $\alpha = 90^o$ (por lo tanto $\beta = 0^o$). El esquema quedará entonces:



Se resalta que la componente de la velocidad inicial en la dirección vertical es nula debido a que el objeto es lanzado horizontalmente.

Teniendo en cuenta que $\gamma = 0$ por lo tanto $\cos\gamma = 1$ y $\mathrm{sen}\gamma = 0$ la componente horizontal de la velocidad vale $V_X = V_{0X} = V_0 = cte$ y para la componente vertical $V_{0Y} = 0$ y $V_Y = -g.t.$

Las correspondientes expresiones de la posición, velocidad y aceleración para este caso particular serán:

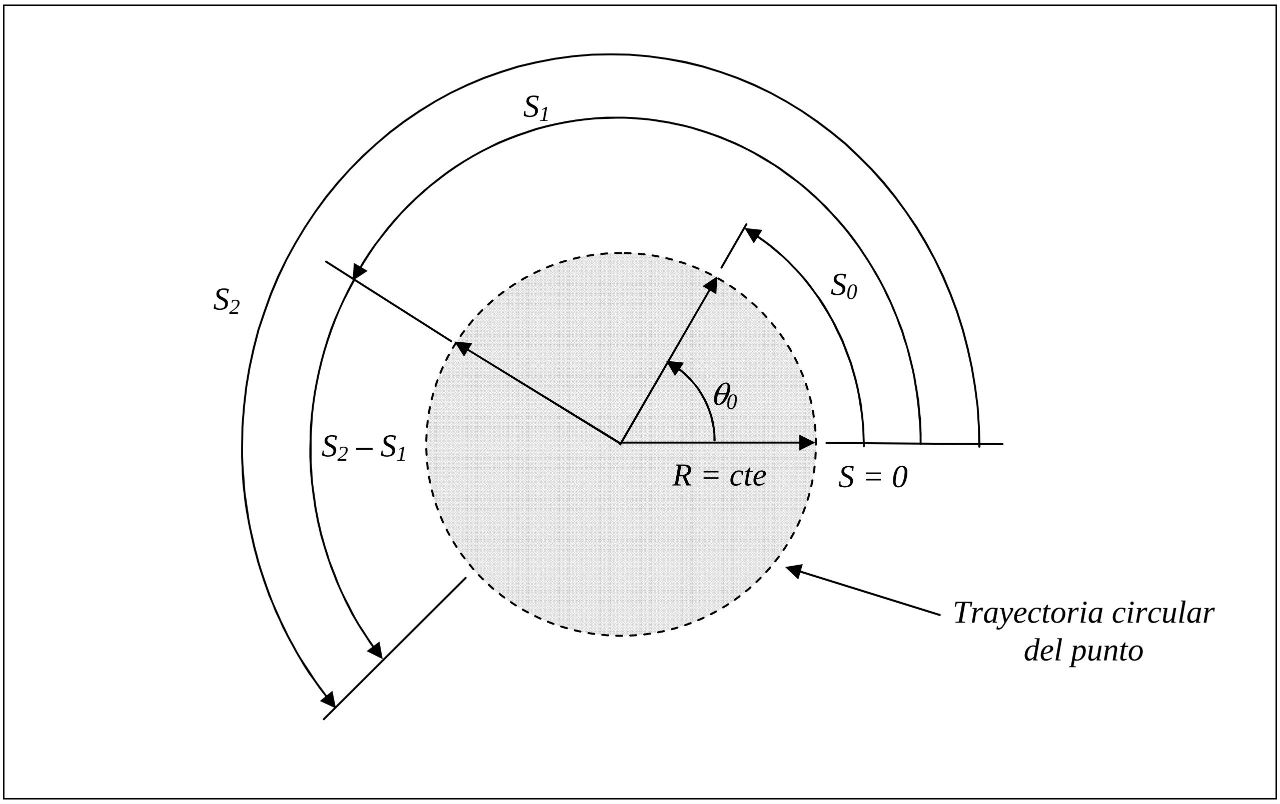
$$x = V_0 \cdot t$$

$$y = H - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$z = 0$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

La característica de este tipo de movimiento plano es la de mantener el radio de curvatura constante.
La siguiente gráfica muestra una trayectoria circular definida por un punto (en línea de trazos) para diferentes posiciones tomadas todas ellas respecto de una referencia definida arbitraria $S = 0$. Las distancias S_0, S_1 y S_2 corresponden a las longitudes de los arcos que definen las posiciones del punto en estudio para cada instante.



A cada arco S le corresponde un ángulo θ y, debido a que el radio permanece constante, se puede determinar la relación entre ambas cantidades de acuerdo a la expresión:

$$S = \theta \cdot R$$

Si se realiza el cociente incremental entre el arco recurrido y el tiempo empleado se determina la rapidez media entre los instantes considerados. Se debe tener especial cuidado en no confundir con la velocidad media, dado que esta última es una magnitud vectorial y la primera corresponde a una magnitud escalar.

VELOCIDAD ANGULAR

La velocidad angular media de un punto definido por su vector posición es la razón de cambio de la posición angular $\Delta\theta$ de ese mismo vector posición en un lapso de tiempo Δt según la expresión:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular instantánea se define para un intervalo de tiempo Δt muy pequeño quedando:

$$\omega_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

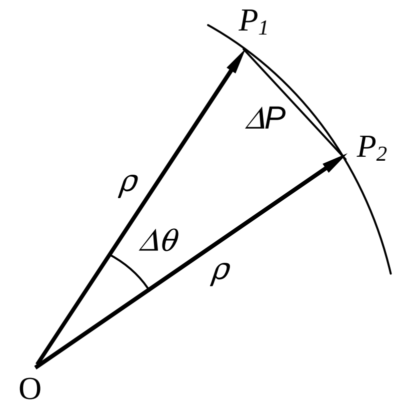
Se resalta el hecho de que la velocidad angular puede ser detectada por los seres humanos más fácilmente que la velocidad lineal.
Por ejemplo, si una persona se encuentra parada en el extremo del tramo recto de una ruta mientras que en el otro extremo se encuentra un automóvil, en un primer momento la persona no podrá decir si dicho automóvil se encuentra en reposo, acercándose o alejándose, será necesario dejar pasar un cierto tiempo hasta poder decidirlo.
Por el contrario, si ese mismo móvil es observado desde un punto perpendicular a la ruta, inmediatamente se podrá decir en qué sentido se desplaza.

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA VELOCIDAD TANGENCIAL

Dado un punto que se desplaza describiendo una trayectoria definida por el vector posición o radio de curvatura ρ cuyo módulo permanece constante[19] se puede expresar, observando la figura, que el arco descrito entre P_1 y P_2 definido por ΔP se relaciona con el ángulo $\Delta\theta$ de acuerdo a la expresión:

$$\Delta P = \Delta\theta \cdot \rho$$

De acuerdo a la figura se tendrá:



Dividiendo ambos miembros de la igualdad por un intervalo de tiempo Δt se tendrá:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta \cdot \rho}{\Delta t} =$$
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \rho$$

En el límite cuando Δt tienda a cero, se obtendrá el módulo de la velocidad tangencial dada por la expresión:

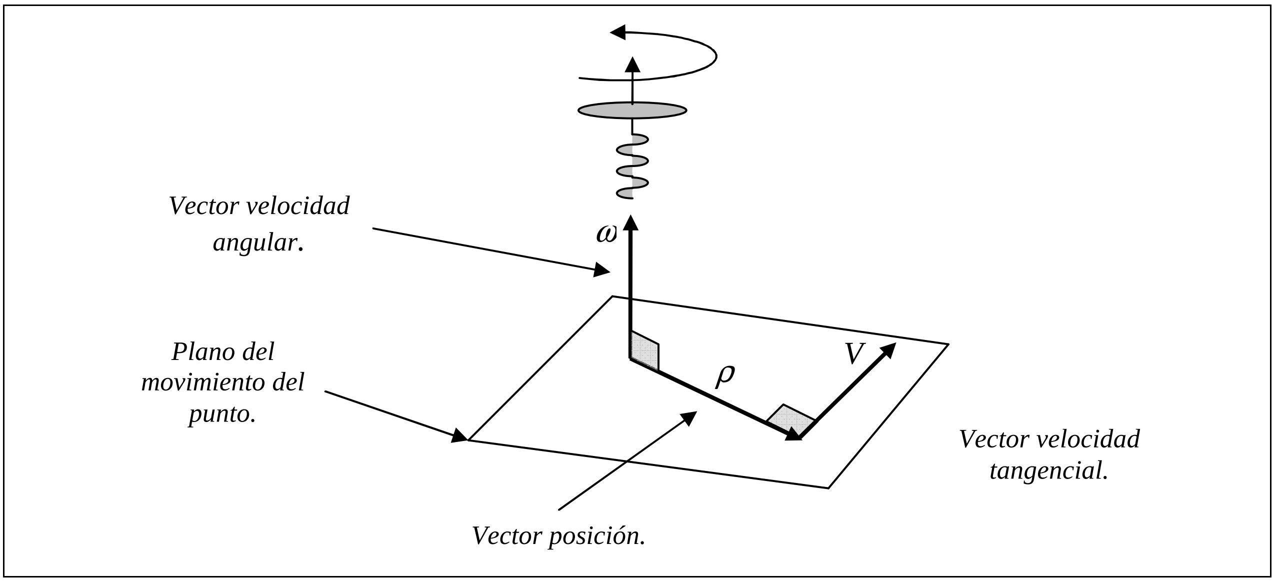
[19] Para el caso de radios de curvatura que no permanezca constante, aparece otra componente de velocidad que se estudiará en cursos más avanzados.

$$V = \omega \cdot \rho$$

La expresión trata las magnitudes involucradas en forma escalar y para poder relacionar las tres magnitudes vectorialmente, es necesario utilizar el producto vectorial definido como:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

El vector velocidad angular se encuentra perpendicular al plano formado por los vectores velocidad tangencial y vector posición según se indica en la figura.



El sentido del vector velocidad angular responde a varias convenciones entre las que se encuentra "regla del tirabuzón". Esta indica que el sentido del vector velocidad angular será coincidente con el del avance de un tirabuzón que gire según lo hace el vector "ρ". En el esquema, el tirabuzón se eleva al hacerlo girar por lo que el vector ω será el indicado en el esquema.

ACELERACIÓN ANGULAR

La definición de aceleración angular aplicada al movimiento de rotación para un intervalo de tiempo Δt, será:

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Aquí se cumple que la aceleración angular será un vector coincidente en dirección y sentido si la variación de la velocidad angular aumenta (es decir si la velocidad final es mayor que la inicial). Se resalta que el signo de la velocidad y aceleración respecto a las convenciones arbitrarias. El movimiento de rotación será acelerado si la variación de la velocidad angular tiene el mismo signo que la aceleración y viceversa.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

La característica de este tipo de movimiento es que la trayectoria que describe un punto cualquiera corresponde a una circunferencia, donde la longitud de la misma en función del ángulo barrido se puede expresar como:

$$s = \theta . R$$

Siendo *S* el arco de circunferencia, θ el ángulo barrido y *R* el radio constante de la misma. En el Sistema Internacional de unidades, tanto el arco como el radio se medirán en metros y el ángulo en radianes[20].

Resulta uniforme debido a que la velocidad con la que gira permanece constante y está dada por la expresión:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La unidad en el S.I. es s^{-1} (que se lee segundo a la menos uno y que equivale a 1/s ya que el radián es adimensional) o radianes sobre segundo:

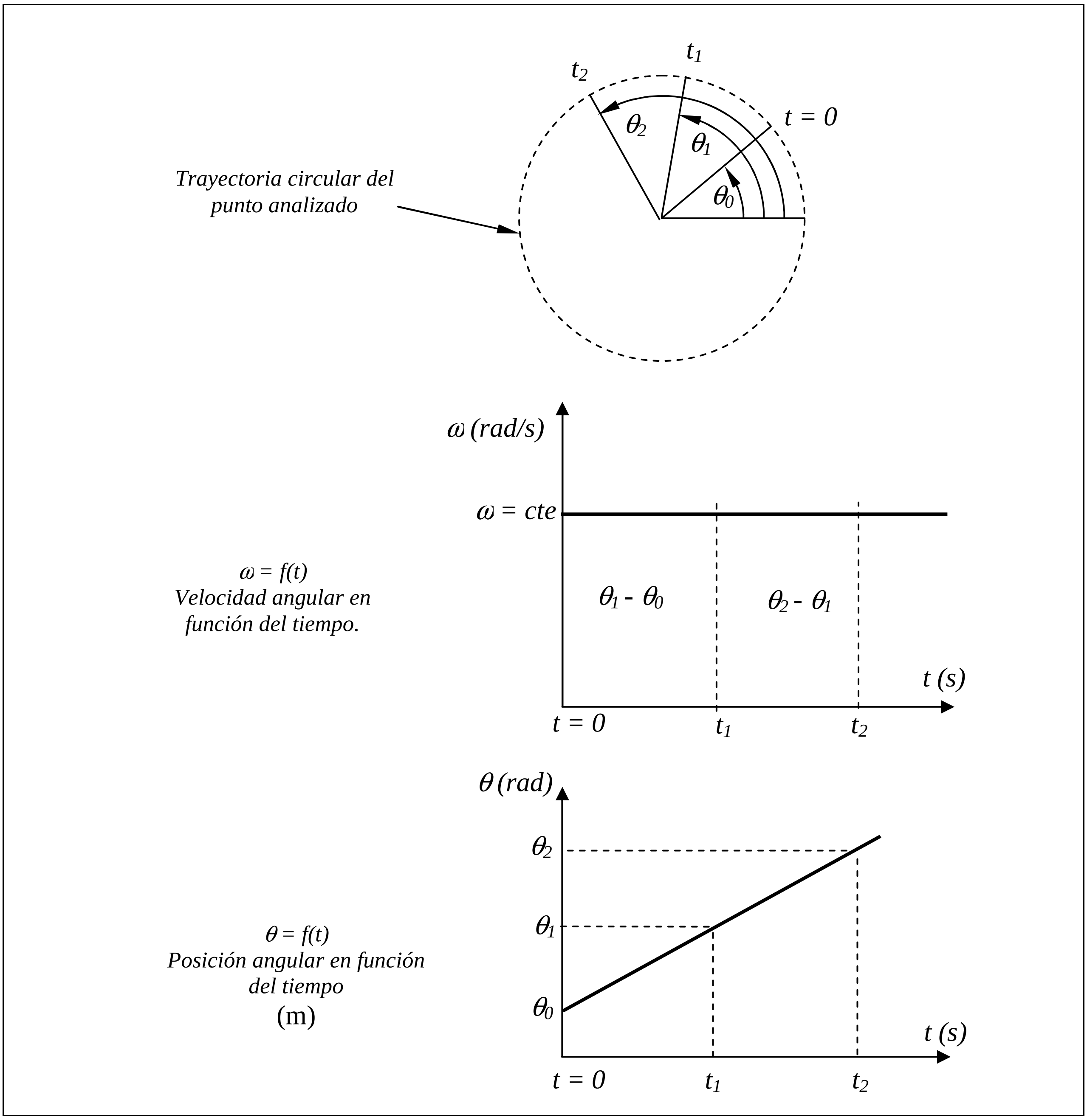
$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$$
$$\theta - \theta_0 = \omega \cdot (t - t_0)$$
$$\theta = \theta_0 + \omega \cdot (t - t_0)$$

Si se considera que para el instante inicial $t_0=0$ el ángulo girado vale θ_0, la expresión anterior quedará:

$$\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Si se grafican la velocidad angular y la posición angular respecto del tiempo se tendrá:

[20] El radian es la unidad del sistema de medición de ángulos denominado radianes y tiene la característica de ser adimensional. Esto es fundamental ya que se puede operar algebraicamente con el radio medido en metros resultando el arco con la misma unidad de medida.



Estos gráficos responden a las mismas leyes de variación que los correspondientes al del movimiento rectilíneo con velocidad constante, con la diferencia que las unidades son diferentes al igual que las trayectorias descriptas.

Para pensar
Si un reloj marca las 12:00hs quedando las dos agujas superpuestas en posición vertical, ¿se puede determinar graficando el tiempo que tardarán las agujas en superponerse nuevamente?

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

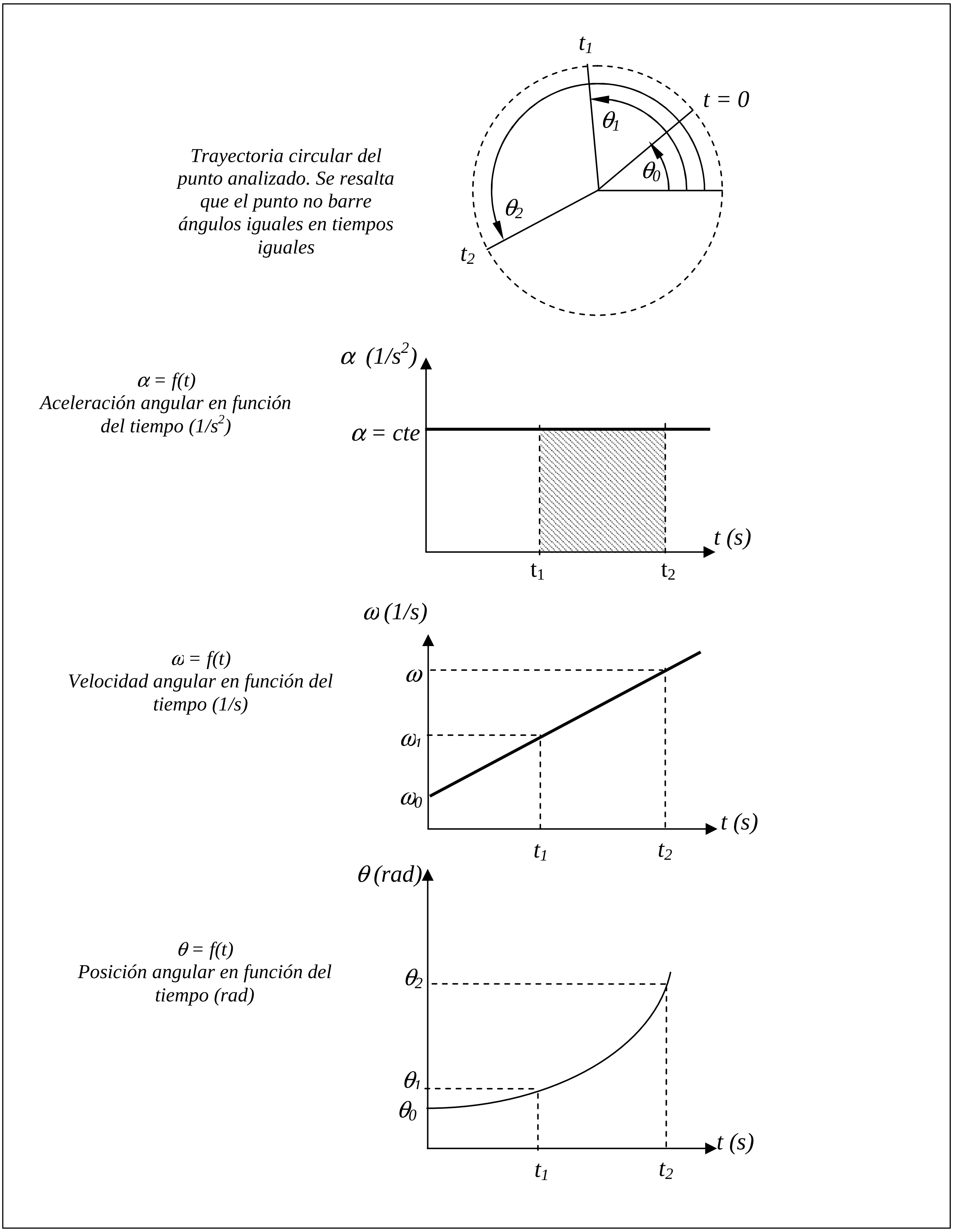
Reiterando la similitud que existe entre los movimientos rectilíneos y circulares, para este caso la aceleración angular se define, para un intervalo de tiempo Δt, como:

$$\alpha_{MED} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La unidad en el S.I. de esta aceleración es $1/s^2$ (radianes sobre segundo al cuadrado).
La aceleración instantánea será aquella en la que el incremento de tiempo tienda a cero. En símbolos queda:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Si se grafican la posición, la aceleración angular, la velocidad angular y el espacio angular barrido respecto del tiempo se tendrá para este movimiento circular lo siguiente:



La analogía entre la velocidad instantánea lineal y velocidad angular para un movimiento curvilíneo se deduce de la expresión:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

Aquí, ρ es el radio de curvatura de la trayectoria curvilínea que para el movimiento circular, la trayectoria será siempre realizada con un radio de curvatura constante correspondiente al radio de la circunferencia, por lo que la expresión quedará como:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Si se deriva esta expresión, se obtendrá el vector aceleración como se muestra:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}$$

Recordando las definiciones dadas, esta expresión se puede escribir vectorialmente como:

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

Para el movimiento circular los vectores definidos anteriormente son todos perpendiculares, por lo tanto son también válidas las expresiones escalares correspondientes.

$$\begin{aligned} s &= \theta.R \\ V &= \omega.R \\ a &= \alpha.R \end{aligned}$$

Otra manera de ver la analogía entre los movimientos lineales y angulares es a partir de la expresión del espacio definido para el movimiento rectilíneo[21] con aceleración constante dada por la expresión:

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Si a esta expresión que representa el arco recorrido por un punto, al dividir la expresión por el radio de curvatura que esta describe, se obtiene:

$$\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v_0.t}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot t^2}{R}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Donde θ corresponde al ángulo barrido en el tiempo *t;* θ_0 corresponde al ángulo inicial a partir del cual se comienza a contar el tiempo que corresponde al instante *t = 0* definido como referencia inicial.

La velocidad angular ω_0 que posee el punto del cuerpo rígido en el instante inicial de referencia y α es la aceleración angular del punto analizado que será constante en todo instante.

Para el caso de tomar como referencia un tiempo inicial diferente a *t = 0* se deberá utilizar la expresión:

$$\Delta\theta = \omega_0.\Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (\Delta t)^2$$

[21] Esta expresión se dedujo para trayectorias rectas, pero la expresión es también válida para la distancia recorrida sobre la curva con celeridad *V* y aceleración constante *a*.

Donde $\Delta\theta$ corresponde al espacio angular recorrido en el intervalo de tiempo Δt.
Es común confundir la frecuencia[22] con la velocidad angular. Cuando se habla de revoluciones por minuto (o *rpm*) se hace referencia a las vueltas por minuto. Para determinar a qué velocidad angular se refiere se debe considerar que una vuelta equivale al ángulo de 2π medido en radianes. De acuerdo a esto se tendrá que la velocidad angular dada en unidades del Sistema Internacional para una frecuencia f dada en *rpm* como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.\pi.\Delta n}{\Delta t} = \frac{2.\pi.f}{60}$$

Ejemplo

Se informa que una rueda ya había girado 50 vueltas a las 2:30hs a velocidad constante. En las siguientes dos horas logró girar 20 vueltas más también a velocidad constante. Determine el ángulo girado al inicio de ese mismo día y el girado en el día completo.
Solución: La velocidad angular que posee la rueda es:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} == \frac{20.2.\pi}{2,0} = 62,8 rad/h = \frac{62,8}{3.600} rad/s$$

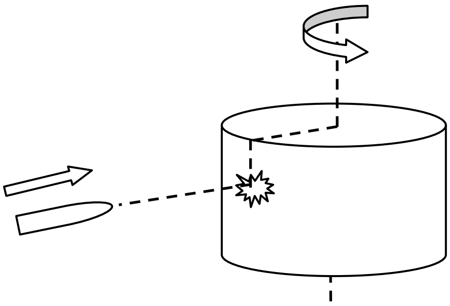
$$\Delta\theta = \omega.\Delta t$$
$$\theta_f - \theta_0 = \omega.(t_f - t_0)$$
$$\theta_f = \theta_0 + \omega.(t_f - t_0)$$
$$\theta_0 = \theta_f - \omega.(t_f - t_0) =$$
$$\theta_0 = 50.2.\pi - 62,8.(2,5 - 0,0) = 157 rad$$

Para calcular el ángulo girado en un día completo se utiliza la misma velocidad angular de acuerdo a:

$$\theta_f = \theta_0 + \omega.(t_f - t_0)$$
$$\theta_f = 157,1 + 62,8.(24,0 - 0,0) = 1.664,3 rad$$

Para pensar

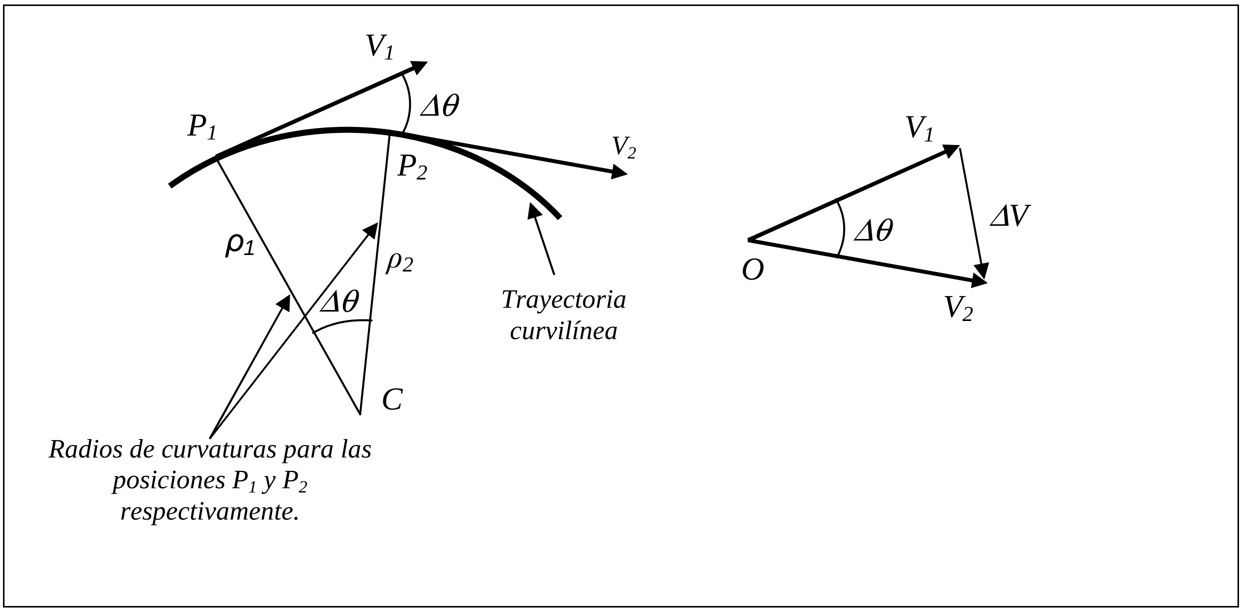
Si a un cilindro de papel de diámetro *D* que está girando a velocidad angular constante ω se le dispara en forma radial un proyectil a velocidad V_P, ¿puede suceder que solo quede un orificio de bala? Justificar la respuesta analítica y gráficamente.



[22] Se define la frecuencia como la cantidad de vueltas dadas en la unidad de tiempo.

CONCEPTO VECTORIAL DE ACELERACIÓN CENTRÍPETA

Podemos definir el vector aceleración como el cambio temporal del vector velocidad. En la figura se presenta una trayectoria curvilínea en el plano y la correspondiente velocidad del mismo punto para dos instantes diferentes.



Aquí se debe resaltar la característica vectorial de la velocidad, ya que $\Delta V = V_2 - V_1$ puede resultar diferente de cero aun para el caso en que los módulos de las velocidades sean exactamente iguales.

Para este caso particular se desprende que existe una aceleración en el movimiento curvilíneo, que surge como consecuencia del cambio de la dirección del vector velocidad y, para determinarla, se recurre a la siguiente demostración:

se ubican ambos vectores velocidad en un mismo origen "*O*" determinando la diferencia en forma gráfica obteniendo ΔV.

El ángulo formado por los radios de curvatura $\Delta\theta$ es exactamente el mismo que el formado por los vectores velocidad, por lo tanto, el triángulo CP_1P_2 es semejante al formado por los vectores $V_1V_2\Delta V$.

Cuando el punto P_2 se acerque a P_1, lo que ocurrirá para un intervalo de tiempo muy pequeño, el vector aceleración tendrá la misma dirección y sentido que ΔV, esto es, tendrá la dirección perpendicular a la trayectoria y hacia el centro "*C* ".

Si la rapidez es la misma, se cumple *que* $|V_1| = |V_2|$. En este caso $\Delta\theta$ tiende a cero según se deduce de la figura y ΔV se hace perpendicular a *V*. Por semejanza de triángulos se puede expresar la siguiente igualdad:

$$\frac{|\Delta V|}{V} = \frac{\Delta S}{\rho}$$

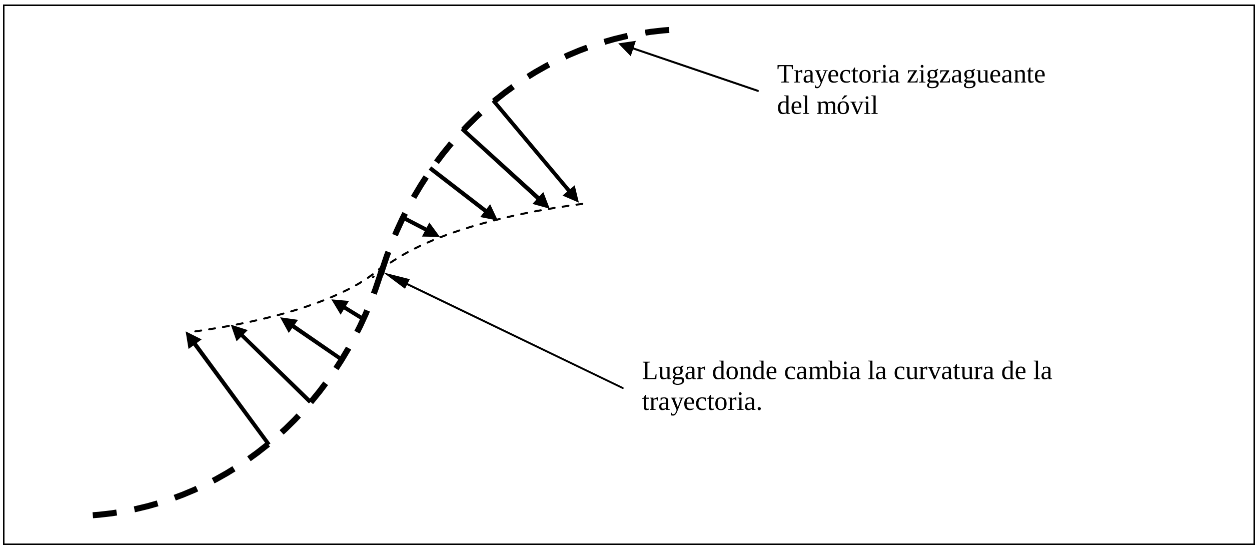
$$|\Delta V| = V.\frac{\Delta S}{\rho}$$

Si se divide la expresión anterior por Δt y agrupando, se tendrá:

$$\frac{|\Delta V|}{\Delta t} = V.\frac{\Delta S}{\rho.\Delta t}$$

$$|a| = \frac{V^2}{\rho}$$

El vector aceleración será perpendicular a la velocidad, su sentido estará dirigido hacia el centro de curvatura y su módulo estará dado por la expresión anterior.
Esta aceleración aparece en los movimientos curvilíneos y se denomina aceleración centrípeta[23], su dirección es perpendicular a la trayectoria y siempre se encuentra dirigida hacia el centro de curvatura.
En la siguiente figura se muestra el comportamiento de la aceleración normal sobre un punto que se desplaza con celeridad constante a lo largo de una trayectoria zigzagueante.

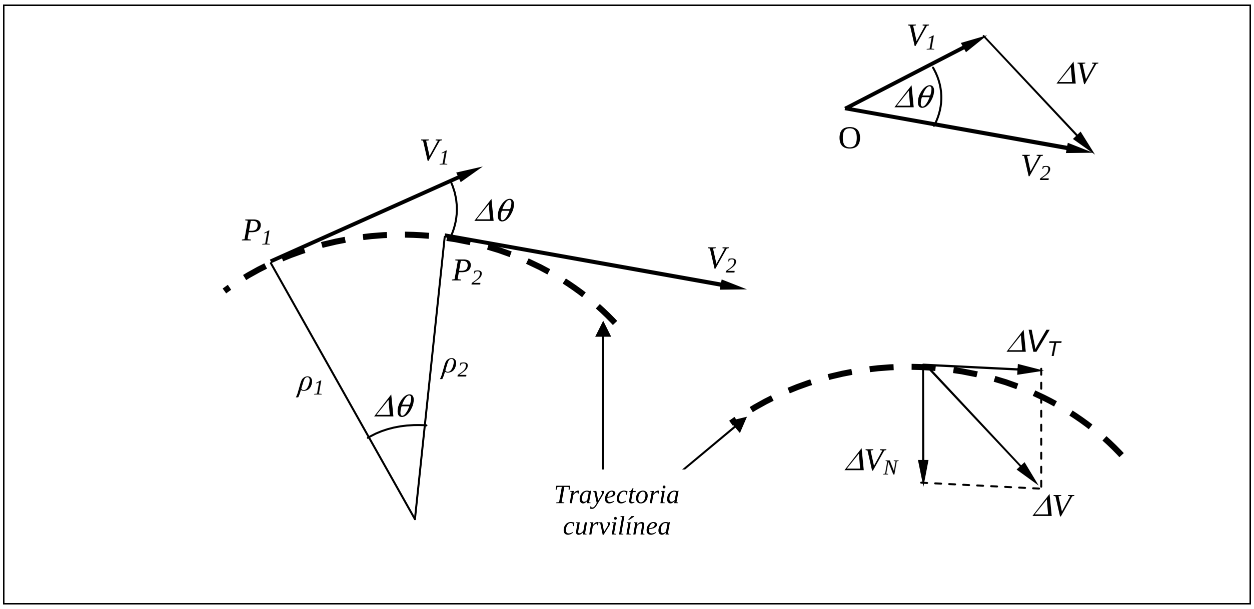


Se puede observar las diferentes aceleraciones normales a lo largo de la trayectoria, todas ellas perpendiculares a la misma.

ACELERACIÓN TOTAL (TANGENCIAL Y CENTRÍPETA)

Para el caso en que el movimiento curvilíneo no se realice con rapidez[24] constante, la diferencia vectorial ΔV se puede descomponer en dos direcciones según se muestra en la figura.
Para este, la diferencia vectorial ΔV se puede descomponer en dos direcciones perpendiculares respecto al punto P_1 según muestra en la figura.

[23] En algunas bibliografías, a esta aceleración se la denomina aceleración radial o normal.
[24] Se refiere solo al módulo del vector velocidad.



Una dirección normal (o perpendicular) a la trayectoria, dada por el vector ΔV_N y que fuera analizada en el punto anterior y otra tangente a la trayectoria respecto al mismo punto representada por el vector ΔV_T.
Para la componente tangencial, se puede expresar su módulo como:

$$|\Delta V_T| = |V_2| - |V_1|$$

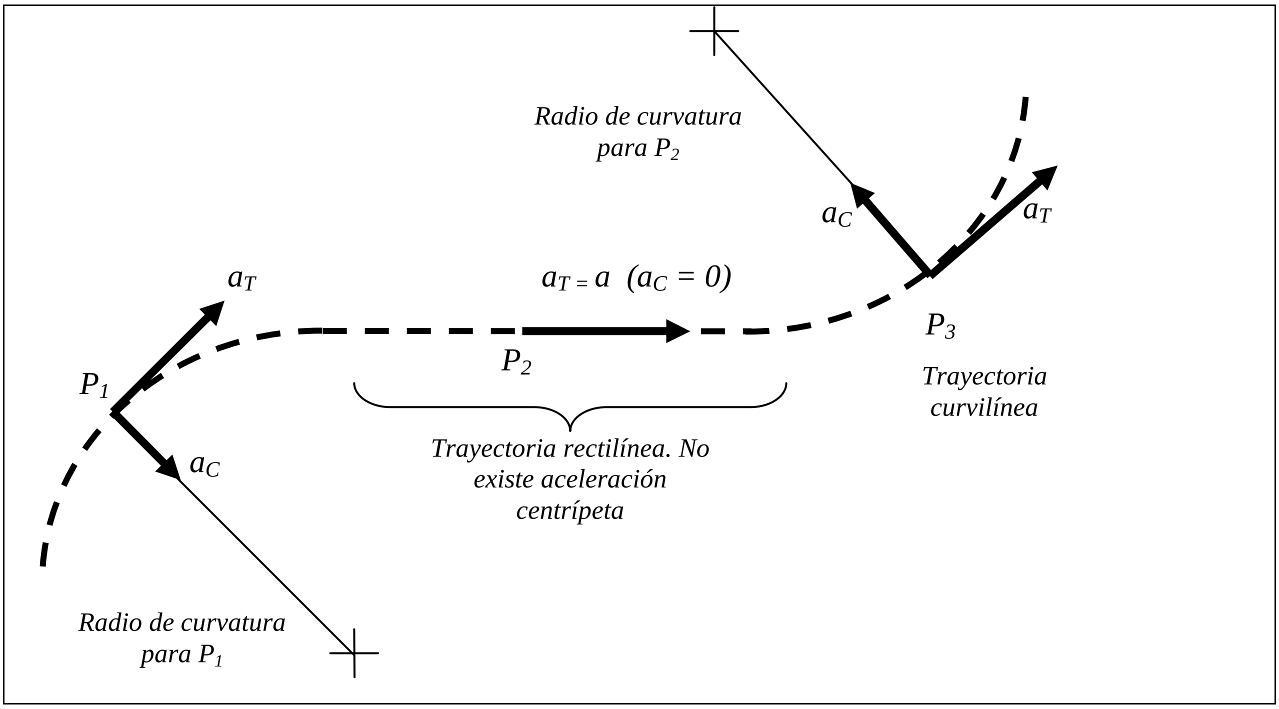
El vector aceleración en la dirección tangencial y para un intervalo de tiempo muy pequeño será:

$$|a_T| = \frac{|\Delta V_T|}{\Delta t}$$

Finalmente, el vector aceleración total será la suma vectorial de dos vectores ortogonales de acuerdo a la expresión:

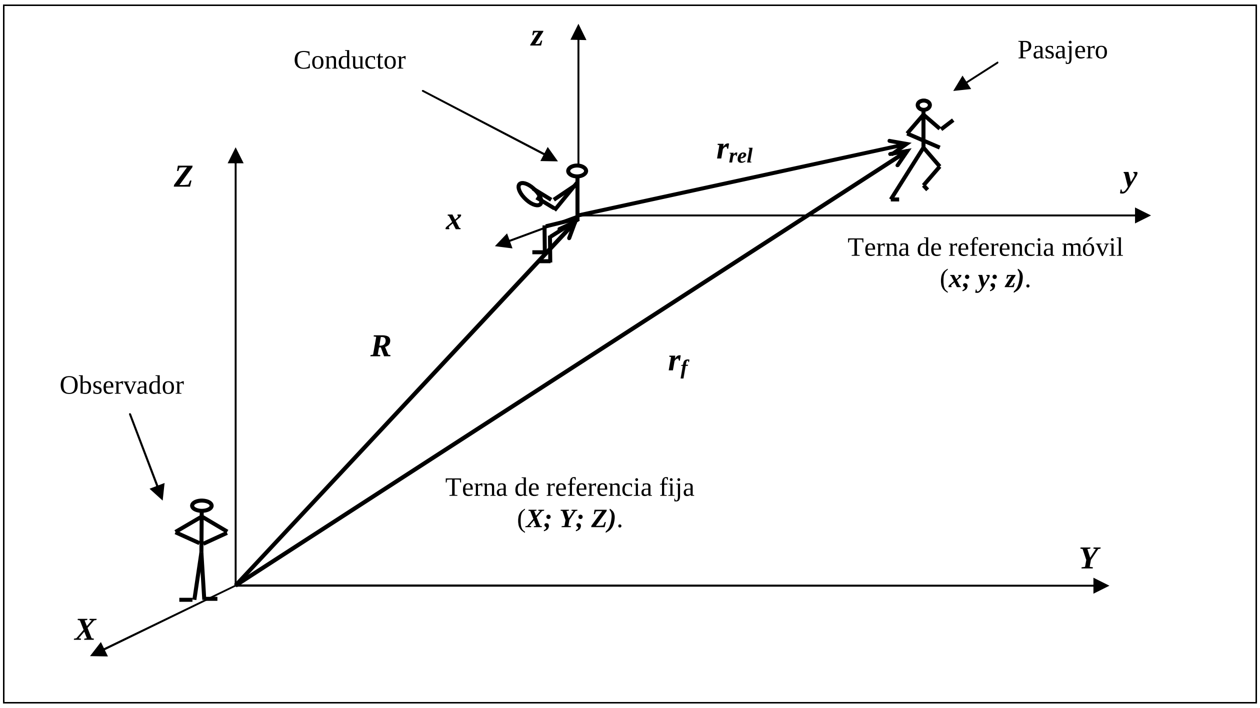
$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$$

Dada una trayectoria cualquiera y suponiendo que el punto se mueva sobre la misma con una aceleración tangencial constante, se tendrá, para tres instantes diferentes las componentes que se muestran en la figura:



CINEMÁTICA RELATIVA

Al comienzo del capítulo de cinemática del punto se resaltó que, para determinar si un objeto estaba en movimiento se debía fijar una referencia. Esto se experimenta en la vida real al trasladarnos sobre un vehículo en una ruta en medio del tránsito y observar el exterior. Si el observador "es la referencia", puede observar que los costados del camino se mueven hacia atrás, el vehículo que viaja delante parece no moverse al igual que viene detrás. Al sobrepasar un automóvil lo vemos ir para atrás muy despacio, otro que viaja en el carril contrario nos cruza en un instante y, lo más interesante es cuando un pasajero (en este caso el observador de referencia) camina hacia atrás en el pasillo de un ómnibus mientras este se mueve lentamente hacia delante, observa que el exterior "está quieto" y así muchos otros ejemplos.
El análisis del movimiento relativo se realizará utilizando el ejemplo del ómnibus de acuerdo al siguiente esquema.



Para poder analizar los ejemplos dados, se definirán dos referencias respecto de las cuales se describirán los diferentes movimientos a saber: una referencia que se ubicará solidaria al móvil la cual se denominará “referencia relativa o móvil” y otra solidaria en los ejemplos dados a la tierra la que se denominará “referencia absoluta o fija”.

Para relacionar estas referencias con el ejemplo del ómnibus, si la referencia relativa se ubica en asiento del conductor, este verá al pasajero que recién asciende caminando hacia atrás y al resto del pasaje quieto en sus asientos. Si al mismo tiempo, un observador parado en el andén observa la situación, vería al chofer moviéndose a la misma velocidad que el ómnibus pero al pasajero del pasillo caminando en la misma posición, o sea quieto.

La figura muestra dos sistemas de coordenadas cartesianas, una para cada referencia.

El pasajero visto por el conductor se posiciona con el vector posición rrel. El observador parado en el andén observa al conductor cuya posición está determinada por el vector R y al pasajero ubicado mediante el vector rabs.

Finalmente se puede establecer la suma vectorial:

$$r_{abs} = R + r_{rel}$$

La variación temporal de cada vector dará origen a vectores velocidad pudiéndose escribir:

$$V_{abs} = V_{arr} + V_{rel}$$

Donde:

$$V_{arr} = \frac{dR}{dt}$$

representa el vector velocidad con que se desplaza la referencia móvil respecto de la fija. Para el ejemplo dado corresponderá a la velocidad de ómnibus y es también denominada velocidad de arrastre del sistema móvil respecto del fijo (o arrastre del sistema relativo respecto del absoluto).

$$V_{rel} = \frac{dr_{rel}}{dt}$$

corresponde a la velocidad con que el pasajero se mueve respecto de la referencia móvil. También se la denomina velocidad relativa porque es justamente la referencia relativa la que se utiliza para definirla. Finalmente la expresión:

$$V_{abs} = \frac{dr_{abs}}{dt} = \frac{dR}{dt} + \frac{dr_{rel}}{dt}$$

representa la velocidad absoluta del pasajero respecto del observador parado en el andén. Si la velocidad de arrastre:

$$V_{arr} = \frac{dR}{dt}$$

es cero, lo que significa que el ómnibus permanece en reposo, la velocidad relativa coincidirá con la absoluta, por lo que el observador y el chofer ven al pasajero desplazarse a la misma velocidad. Si el pasajero camina hacia atrás a la misma velocidad que lo hace el ómnibus pero hacia delante, el chofer ve al pasajero alejarse mientras que el observador desde el andén lo ve en reposo.

Siguiendo con el caso de movimiento de traslación, las aceleraciones se obtienen realizando el incremento de la velocidad en función del tiempo quedando:

$$a_{abs} = \frac{dV_{abs}}{dt} = \frac{dV_{arr}}{dt} + \frac{dV_{rel}}{dt}$$

Para pensar
Si en un instante se tiene un objeto cayendo libremente desde una cierta altura y en la misma dirección vertical pero más abajo se tiene otro objeto que ha sido lanzado verticalmente hacia arriba ¿Cuál será la aceleración relativa entre ambos móviles antes de que se intercepten? Y si las trayectorias verticales de ambos se encuentran separadas ¿Cuál será la aceleración relativa entre ambos cuando se encuentran a la misma altura?

DINÁMICA - LEYES DE NEWTON

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos debido a la acción con que las fuerzas resultantes de la interacción con otros cuerpos. Existen tres leyes que rigen el comportamiento dinámico entre los cuerpos enunciadas por Isaac Newton que dicen:

PRIMERA LEY. Un punto material permanece en reposo o continúa en movimiento rectilíneo uniforme si sobre él la fuerza resultante es nula.

SEGUNDA LEY. La aceleración de un punto material es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre él y tiene la dirección y sentido de dicha fuerza.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción entre los cuerpos en contacto son de igual intensidad, actúan en la misma dirección pero poseen sentido opuesto.

La validez de estas leyes ha sido verificada mediante numerosas mediciones físicas de gran precisión pero es necesario respetar ciertas condiciones.
Si por ejemplo, una persona se encuentra parada en el pasillo de un ómnibus y este acelera hacia adelante, ¿cómo puede ser que, sin que actúe una fuerza sobre ella, se mueva repentinamente hacia atrás? De igual manera, si viajando a velocidad constante, cuando el ómnibus frena repentinamente el pasajero se mueve hacia delante sin que se le aplique ninguna fuerza externa.
Para que se cumplan las leyes de Newton es necesario que se cumplan ciertas consideraciones y para el ejemplo analizado, las leyes se cumplen solo cuando el ómnibus utilizado como marco de referencia se mueve con velocidad rectilínea uniforme. Cuando esto ocurre se dice que el marco de referencia es inercial[25].
En los instantes en que se produce la aceleración o el frenado, el marco de referencia pasa a denominarse no inercial y no se cumplen las leyes de Newton debiendo realizarse ciertas correcciones.
Otro ejemplo de marcos de referencias no inerciales es cuando, para el mismo ejemplo anterior y manteniendo la rapidez se toma una curva, en ese momento se siente como si el pasajero sale despedido hacia afuera.
La segunda ley de Newton es la base de la mayoría de los análisis en Mecánica y, aplicada a un punto material de masa *m* sometido a una fuerza resultante *F*, puede enunciarse mediante la expresión vectorial:

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

Por ejemplo, si una persona aplica una fuerza para empujar a un ciclista montado en su bicicleta, esta (si se desprecian todas las resistencias) aumentará su velocidad muy rápidamente en comparación al caso de aplicar esa misma fuerza sobre un automóvil. Este último se "resistirá" mucho más al cambio de velocidad por que tiene mayor masa.
Por otro lado, la dirección de la fuerza aplicada y la dirección de la aceleración que consigue el móvil es la misma.
Si se analiza la expresión de la segunda ley de Newton presentada como:

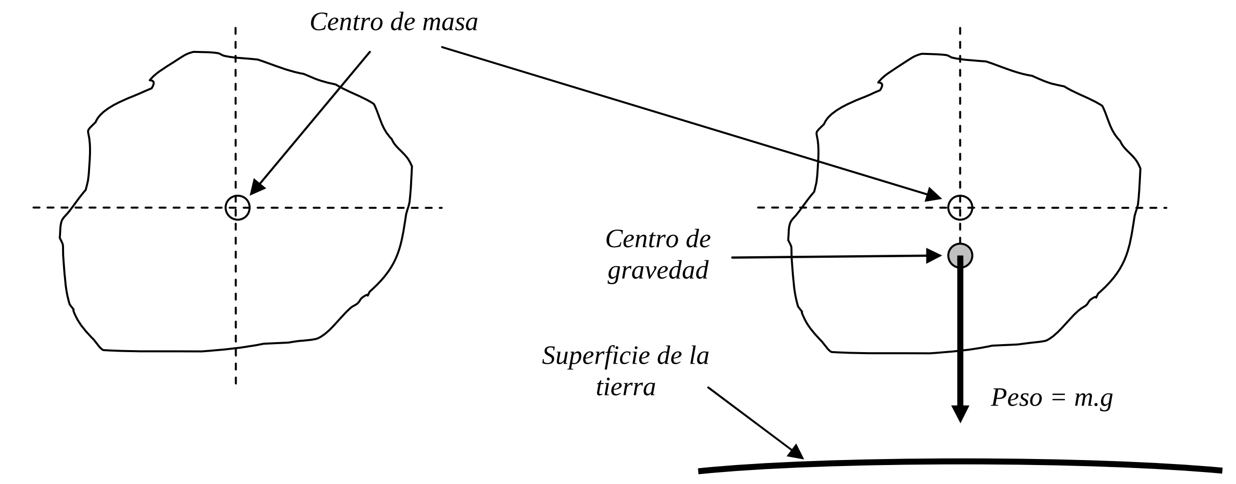
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

[25] Un sistema de referencia se considera inercial cuando se encuentra en reposo o se traslada con movimiento rectilíneo uniforme.

se tendrá que para dos cuerpos que se le aplique la misma fuerza la aceleración será mayor cuanto menor sea la masa a mover. Se puede entonces entender a la masa de un cuerpo como la resistencia que presenta este a cambiar su estado de movimiento.

CENTRO DE MASA Y DE GRAVEDAD

Como se vio, la fuerza de gravedad es producida por la atracción de las masas entre sí. La fuerza peso es la resultante de todas las fuerzas que se producen en cada partícula de un cuerpo debido finalmente a la atracción de la masa de la tierra, ya que la atracción mutua de cada partícula entre sí se anulan de a pares.
Si la atracción de la gravedad es constante, el centro de masa del cuerpo coincidirá con el punto donde se puede considerar aplicada la resultante de las fuerzas de atracción gravitatorias.
Como en realidad las fuerzas de gravedad dependen además de la distancia de separación de las masas, para el caso del peso de un cuerpo debido a la atracción de la tierra, las partículas que se encuentran más cerca del centro de la tierra son atraídas con más fuerza que las que se encuentran más alejadas. El centro de gravedad se encontrará por lo tanto desplazado del centro de masa según se indica en la figura:



Cuerpo rígido alejado de cualquier otra masa. No presenta fuerza debido a la atracción de las masas y si la masa del cuerpo está distribuida en forma homogénea, el centro de masa coincide con el centro geométrico.

El mismo cuerpo rígido ubicado en la superficie de la tierra. Aparece la fuerza de atracción gravitatoria denominada peso desplazada del centro de masa hacia el lado de la masa de la tierra.

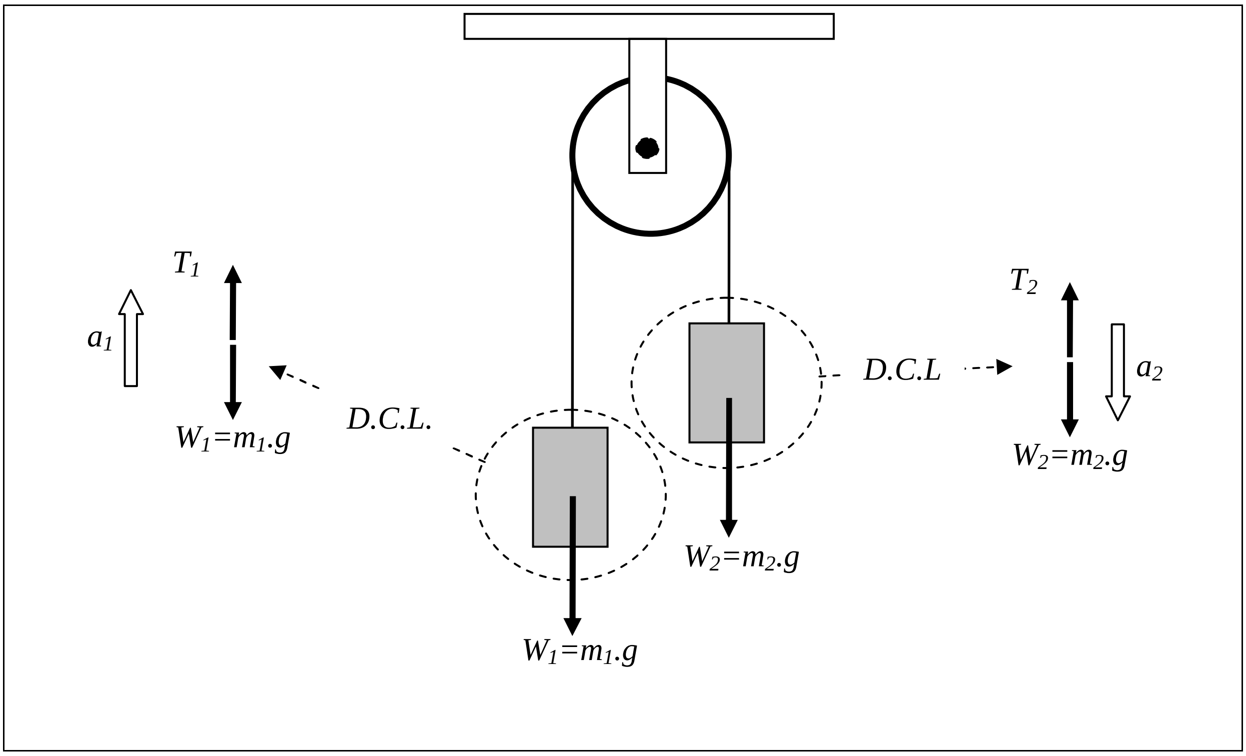
Finalmente se pueden resaltar tres conceptos diferentes a saber:

- Centro de masa: es el lugar donde se puede considerar concentrada toda la masa del cuerpo o de un sistema de partículas.
- Centro geométrico: es el lugar geométrico que corresponde al centro de la figura que posee el cuerpo analizado.
- Centro de gravedad: es el lugar geométrico donde se considera ubicada la resultante de las fuerzas debidas a la atracción gravitatoria.

Estos tres centros coincidirán solo cuando no exista atracción gravitatoria de otra masa externa y la masa del cuerpo sea homogénea.
Salvo que se especifique lo contrario, se considerarán los tres puntos coincidentes.

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON

Sean dos cuerpos de masas desiguales unidas por una cuerda que pasa por una polea sin fricción y sin masa, tal como indica la figura siendo m_2 mayor que m_1. Encontrar la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas.



Solución:
Por ser la masa m_2 mayor que m_1 la aceleración de esta última estará dirigida hacia arriba y para mantener una coherencia con los sentidos de los vectores, se adoptará como positivos todos aquellos que estén dirigidos en ese sentido.
Despreciando todos los rozamientos y suponiendo que la polea no tiene masa se puede escribir, de acuerdo al D.C.L. de la masa m_1, la ecuación del movimiento como:

$$T_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a_1$$

De igual modo para la masa m_2 la ecuación del movimiento es:

$$T_2 - m_2 \cdot g = -m_2 \cdot a_2$$
$$T_2 + m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot g$$

Como las aceleraciones de ambas masas son las mismas al igual que las tensiones, debido a que la cuerda que las une solo cambia el sentido del movimiento, se puede formar el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 \cdot a \\ m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro como uno de los métodos para la resolución de sistema de ecuaciones se determina la aceleración quedando:

$$m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 g$$
$$(m_1 + m_2) \cdot a = (m_2 - m_1) \cdot g$$
$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \cdot g$$

De igual manera la tensión se obtiene realizando el reemplazo correspondiente quedando:

$$T - m_1 g = m_1 \cdot a$$
$$T - m_2 g = m_2 \cdot a$$

$$\frac{T - m_1 g}{m_1} = \frac{-T + m_2 g}{m_2}$$

$$(T - m_1 g) \cdot m_2 = (-T + m_2 g) \cdot m_1$$
$$T \cdot (m_2 + m_1) = 2 \cdot g \cdot m_2 \cdot m_1$$

$$T = \frac{2 \cdot g \cdot m_2 \cdot m_1}{(m_2 + m_1)}$$

MÁQUINA DE ATWOOD

Si para la polea dada en el ejemplo anterior se ubican dos masas que presenten una leve diferencia entre ellas, el sistema presentará una aceleración muy baja según se desprende de la expresión correspondiente pudiendo medir con suficiente aproximación la aceleración del sistema. Esto permite determinar experimentalmente la aceleración de la gravedad actuante de acuerdo a la expresión:

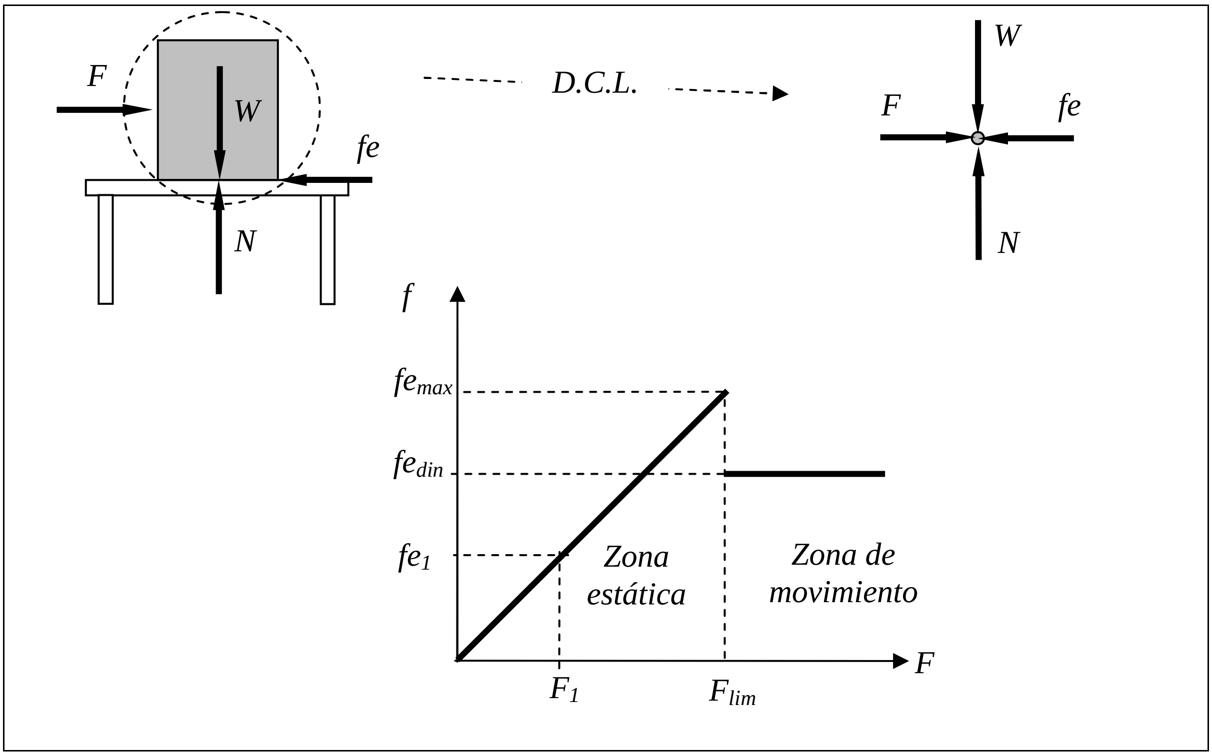
$$g = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)} \cdot a$$

Esta expresión se utiliza solamente para el caso de que las masas de los cuerpos sean diferentes o que el sistema no se encuentre en equilibrio.

FUERZA DE ROZAMIENTO

Para analizar el comportamiento de un cuerpo apoyado sobre una mesa horizontal frente a la acción de fuerzas exteriores, se deben realizar las siguientes consideraciones:
El cuerpo será analizado como una masa puntual donde se considera concentrada toda la masa del cuerpo pero sin dimensiones. De esta manera todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo serán concurrentes y para este caso se puede observar que el sistema se encuentra en equilibrio, para lo cual se denominó *W* a la fuerza de atracción gravitatoria y *N* a la reacción normal del vínculo, en este caso la superficie vertical de la mesa, según se simboliza en el esquema de la figura.

Si ahora se aplica una fuerza horizontal F_1 y el cuerpo mantiene su posición de equilibrio estático, se debe concluir que “apareció” otra fuerza que actúa con igual magnitud y en sentido contrario a la aplicada que se denominará fuerza de rozamiento fe_1[26] según se indica en la figura:



Si se continúa aumentando la fuerza horizontal, seguirá apareciendo una fuerza de rozamiento exactamente igual a la aplicada pero de sentido contrario que se opondrá a que el cuerpo se mueva.
Llegará un momento en que la fuerza de rozamiento no podrá mantener el cuerpo en reposo y, como ocurre en los casos reales, comenzará a moverse en la dirección de la fuerza horizontal aplicada.
Si se confecciona un gráfico de la fuerza de rozamiento en función de la fuerza aplicada se tendrá un comportamiento como el mostrado más arriba.

$$fe \leq \mu_e \cdot N$$

El coeficiente μe se denomina coeficiente de rozamiento estático y se determina en forma experimental. Se puede demostrar que la fuerza de rozamiento máxima fe_{max} que se logra al aplicar esta fuerza horizontal máxima F_{lim} responde a la expresión:

$$fe_{\max} = \mu_e \cdot N$$

Para fuerzas mayores a la F_{lim}, la fuerza de rozamiento será menor según se aprecia en la figura y no dependerá ni de la magnitud de la fuerza aplicada ni de la velocidad con que se mueva el cuerpo dentro de ciertos límites. La expresión para esta fuerza de rozamiento dinámica es:

$$fd = \mu_d \cdot N$$

[26] Se utilizará la letra efe minúscula para identificar a la fuerza de rozamiento y el subíndice “e” se refiere al caso de la fuerza de rozamiento estático. Para el caso de la fuerza de rozamiento dinámica, algunos libros la denominan *fk*.

El coeficiente de rozamiento para este caso en el que el cuerpo se mueve se denomina coeficiente de rozamiento dinámico μd y cumple con la condición:

$$\mu_e > \mu_d$$

TRABAJO Y ENERGÍA

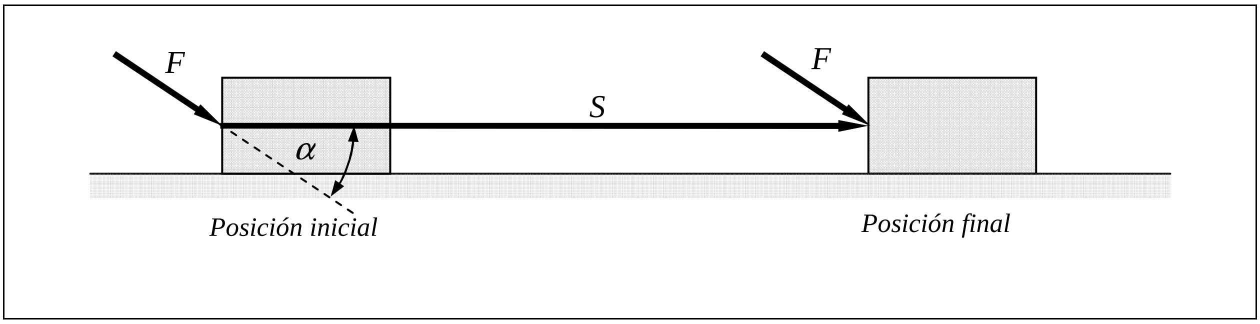
Hasta aquí se trataron los movimientos originados por fuerzas constantes describiéndolos cinemáticamente y, mediante las leyes de Newton se determinan las fuerzas responsables de generar esos movimientos.
Además se trató el comportamiento estático de la acción de fuerzas utilizando las mismas leyes.
Si los movimientos son productos de fuerzas variables, como el caso de una flecha disparada por un arco o un cuerpo empujado por un resorte que se libera, la fuerza aplicada por la cuerda o el resorte en el instante inicial es máxima y va disminuyendo hasta cero en el momento que cesa el contacto.
Sabiendo que la energía no se crea ni se destruye sino que se transforma, se propone ahora un método de resolución basado en el principio de conservación de la energía.
Por ejemplo si se empuja un cuerpo desde una posición a otra o si se lo eleva a una altura determinada, para ambos casos es necesario aplicar una fuerza al objeto para trasladarlo de un lugar a otro o lo que es lo mismo ejercer un trabajo.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si sobre un cuerpo se aplica una fuerza y este se desplaza una distancia, se define como trabajo mecánico de la fuerza constante *F* al desplazarse una distancia *S*, al producto escalar de ambos vectores dados por:

$$W = \vec{F} * \vec{S}$$

En el Sistema Internacional a la unidad de trabajo se la denomina Joule[27] y se la define como el trabajo que realiza una fuerza de un Newton que se desplaza una distancia de un metro.
En la figura se muestra una partícula sobre la que se aplica una fuerza constante *F* no coincidente con la dirección del desplazamiento *S* que describe una trayectoria rectilínea.



Geométricamente interpretado, corresponde al producto entre la proyección de la fuerza aplicada en la dirección del desplazamiento (dada por $F.\cos\alpha$) y la distancia *S* de acuerdo a la expresión:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha$$

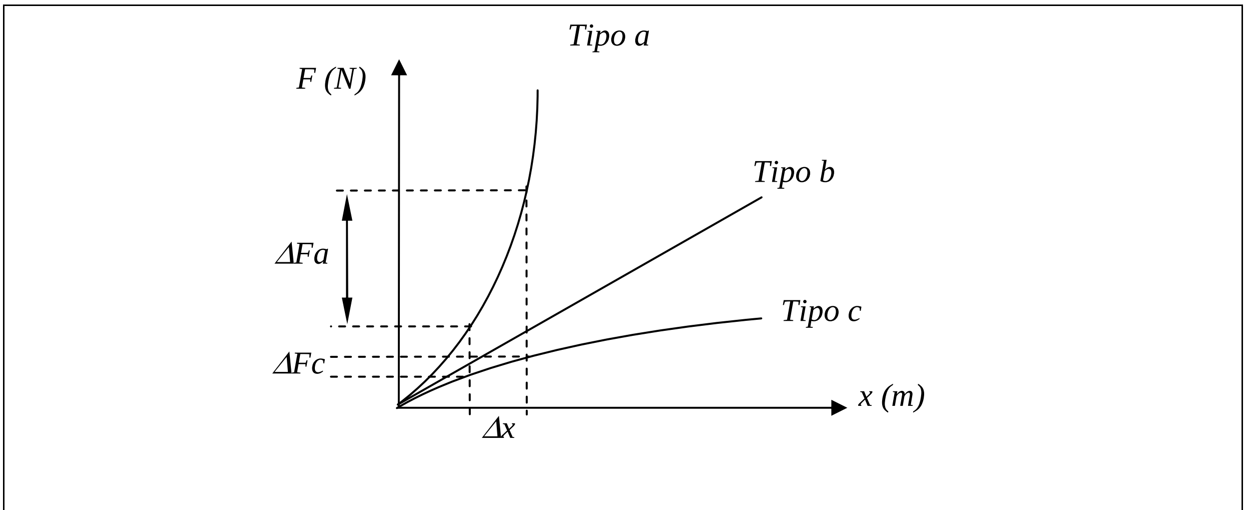
$$W = \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Sx \\ Sy \\ 0 \end{pmatrix} = Fx.Sx + Fy.Sy$$

[27] James Prescott Joule (1818 -1889). Físico británico, a quien se le debe la teoría mecánica del calor, y en cuyo honor lleva su nombre la unidad de la energía en el Sistema Internacional.

Siendo α el ángulo que forma el vector fuerza con el vector desplazamiento en ese orden según se indica en el esquema.
El trabajo por lo tanto puede resultar positivo si la proyección de la fuerza posee la misma dirección del desplazamiento, será negativo si ocurre lo contrario y puede resultar nulo si no existe desplazamiento o la fuerza no posee proyección en la dirección del desplazamiento (α=90º).
Otra característica importante del concepto de trabajo es que se debe especificar concretamente la fuerza que lo realiza. Por ejemplo, si se tiene un cuerpo apoyado sobre una superficie rugosa y se lo desplaza mediante la aplicación de una fuerza a una cierta distancia, se pueden definir en este caso el trabajo que realizan las cuatro fuerzas involucradas, el trabajo de la fuerza aplicada, el trabajo de la fuerza de rozamiento, el trabajo del peso y el de la fuerza normal. Es importante mencionar que el trabajo neto corresponde a la suma algebraica de los trabajos realizados por cada fuerza.

TIPOS DE RESORTES

Si a un resorte, con uno de sus extremos fijos, se le aplica una fuerza en el otro extremo, este se deformará en función a la fuerza aplicada y su comportamiento podrá corresponder a uno de los siguientes tipos según se indica en la figura.



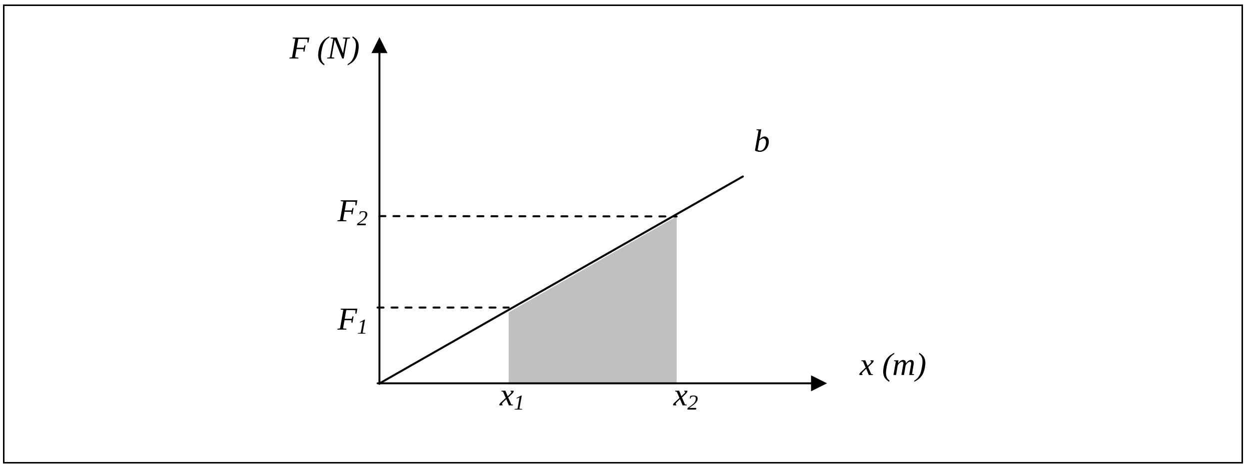
Se observa que para producir la misma deformación Δx en los tres tipos de resorte, el que responde a las características del tipo *“a”*, requiere un incremento de fuerza mayor que el de tipo *“c”* dado que sus comportamientos no son lineales.
El tipo de resorte a utilizar de aquí en adelante será el de tipo *“b”* que responde al del comportamiento lineal dada por la expresión:

$$F = k \cdot X$$

Siendo k la constante del resorte que se determina por la pendiente de la recta cuyas unidades en el sistema internacional son Newton sobre metro (*N/m*).

TRABAJO REALIZADO PARA DEFORMAR UN RESORTE

El trabajo que debe realizarse sobre este resorte para estirarlo desde una posición inicial x_1 hasta la posición final x_2 se puede obtener directamente del área sombreada bajo la gráfica siguiente.



El área sombreada resulta de las diferencias del área de los dos triángulos, quedando:

$$W = \frac{1}{2}x_2 \cdot F_2 - \frac{1}{2}x_1 \cdot F_1$$
$$W = \frac{1}{2}k \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{2}k \cdot (x_1)^2$$
$$W = \frac{1}{2}k \cdot \left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right]$$

Utilizando cálculo integral se puede plantear el trabajo diferencial e integrar entre la posición 1 y 2 quedando:

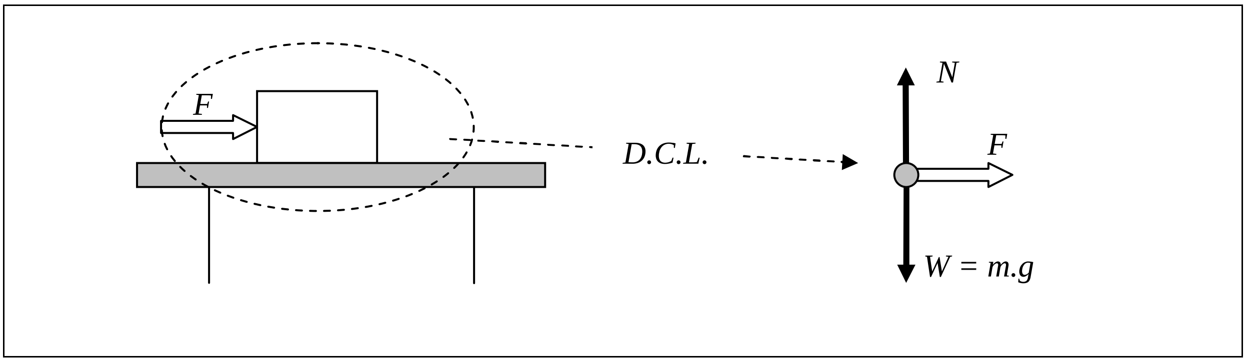
$$dW = F \cdot dx$$
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx$$
$$W = \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx$$
$$W = k \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx$$
$$W = k \cdot \left|\frac{x^2}{2}\right|_{x_1}^{x_2}$$
$$W = \frac{1}{2}k \cdot \left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right]$$

Si se comienza desde la posición de equilibrio, la expresión se reduce a:

$$W = \frac{1}{2}k \cdot (x_2)^2$$

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Dado un cuerpo apoyado sobre una mesa horizontal sin rozamiento al cual se le aplica una fuerza constante *F*, como se muestra en la figura.



Según el diagrama de cuerpo libre, el cuerpo se moverá hacia la derecha incrementando la velocidad del mismo con una aceleración determinada por la segunda ley de Newton.
Esta fuerza neta (o resultante) realiza un trabajo en la distancia *s* dada por el producto escalar de ambos vectores según la expresión:

$$\underline{W = \vec{F} \cdot \vec{S}}$$

Dado que la fuerza neta es constante al igual que la masa del cuerpo sobre la que está aplicada, se puede utilizar los conceptos de cinemática para determinar la expresión de la aceleración en función de la velocidad y el desplazamiento dada por:

$$V_{final}^{\ 2} = V_{inicial}^{\ 2} + 2.a.s$$

$$a = \frac{V_{final}^{\ 2} - V_{inicial}^{\ 2}}{2.s}$$

Reemplazando esta aceleración en la expresión de la fuerza en la segunda de Newton quedará:

$$F = m.a = m.\left(\frac{V_{final}^{\ 2} - V_{inicial}^{\ 2}}{2.s} \right)$$

Esta última expresión se lleva a la del trabajo realizado y teniendo en cuenta que ambos vectores poseen igual dirección y sentido quedará:

$$W = F \cdot s = m \cdot \frac{V_{final}^{\ 2} - V_{inicial}^{\ 2}}{2}$$

Operando algebraicamente se tendrá:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m.\left(V_{final}^{\ 2} - V_{inicial}^{\ 2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot m.V_{final}^{\ 2} - \frac{1}{2} \cdot m.V_{inicial}^{\ 2}$$

A cada término del segundo miembro de la expresión anterior se lo define como energía cinética y representa una magnitud escalar que solo depende de la masa y de la rapidez de la misma. A esta magnitud se la simboliza con la letra *K*.

$$W = K_{finasl} - K_{inicial}$$
$$W = \Delta K$$

Se debe tener en cuenta que las unidades de la energía cinética son exactamente iguales a las del trabajo sabiendo que este es una forma de transferir energía.

POTENCIA

Si se tiene un ascensor con capacidad máxima para 10 personas, no será lo mismo para el motor que acciona la caja que esta suba con una sola persona que con diez. Por otro lado, si el ascensor está lleno, tampoco será lo mismo que suban todas en un minuto que en un segundo.
Se define la potencia media que debe realizar el motor como la razón entre el trabajo realizado en la unidad de tiempo, cuya expresión es:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Las unidades de potencia en el Sistema Internacional son:

$$\frac{Joule}{segundo} = Vatios\ (o\ Watts)$$

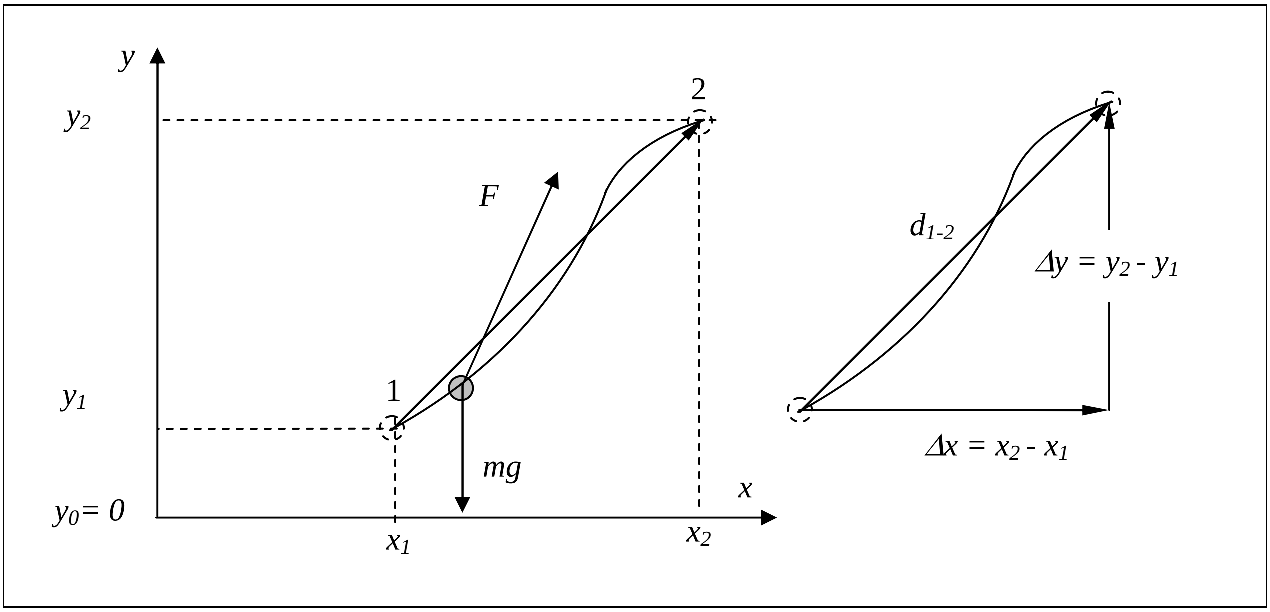
La potencia instantánea realizada por el motor cuando la fuerza permanece constante estará dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Una de las unidades más utilizadas para la potencia es el hp (horse power) que equivale a *1hp=746 W*. También existe el caballo vapor (abreviado CV) cuya equivalencia es *1CV = 735 W*.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA DE UNA PARTÍCULA

Dada una partícula de masa *m* ubicada en la *posición 1*, a una altura h_1 medida respecto de un nivel de referencia definido arbitrariamente h_0. Dicha partícula se traslada según la trayectoria indicada (que puede o no estar contenida en un plano) hasta ubicarse finalmente en la *posición 2* a un nivel dado por la altura h_2 medida desde el mismo nivel de referencia anterior.
La fuerza *F* representa la fuerza actuante sobre ella a excepción de la fuerza peso debida a la atracción gravitatoria, que se deja expresada según se indica en el esquema siguiente:



Analizando por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas indicadas se tiene:
Trabajo de la fuerza peso de la partícula.

$$W_g = (W_g)_X + (W_g)_Y$$

El trabajo del peso en la dirección del *eje x* resulta nulo debido a que la fuerza peso es perpendicular a la componente horizontal. Con respecto al trabajo en la dirección del eje vertical, es el resultado del producto escalar del vector *–mg* por la diferencia de altura entre los puntos *1* y *2* a la que denominamos $\Delta y = y_2 - y_1$. Por lo tanto el trabajo de la fuerza gravitatoria entre los puntos indicados resulta independiente de la trayectoria y está dado por:

$$W_g = -mg(y_2 - y_1) =$$
$$W_g = -mg \cdot y_2 + mg \cdot y_1$$

A las cantidades $m.g.y_2$ y $m.g.y_1$, valores que dependen únicamente de las alturas medidas verticalmente y del peso de la partícula, se las denominará respectivamente energía potencial gravitatoria U_{g2} y $U_{g\,1}$.
Por lo tanto, el trabajo de la fuerza gravitatoria se puede expresar como:

$$W_g = -U_{g2} + U_{g1} = -\Delta U_g$$

Se llega al mismo resultado si se aplica directamente la definición de trabajo de la fuerza peso como el producto escalar siguiente:

$$W_{mg} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} = -mg\Delta y = -mg(y_2 - y_1) = -mgy_2 + mgy_1$$

Trabajo de la fuerza *F*
Según el teorema del trabajo y la energía cinética se tiene que el trabajo de todas las fuerzas ejercidas sobre una partícula (en este caso de la fuerza *F* y el peso *mg*) es igual a la variación de su energía cinética, es decir:

$$W_F + W_{mg} = K_2 - K_1$$
$$W_F - (U_{g2} - U_{g1}) = K_2 - K_1$$
$$W_F = U_{g2} - U_{g1} + K_2 - K_1$$
$$W_F = \Delta U_g + \Delta K$$

Esta última expresión se enuncia como: el trabajo de la fuerza ejercida sobre una partícula excepto la fuerza de gravedad, es igual a la suma de la variación de su energía potencial y cinética.

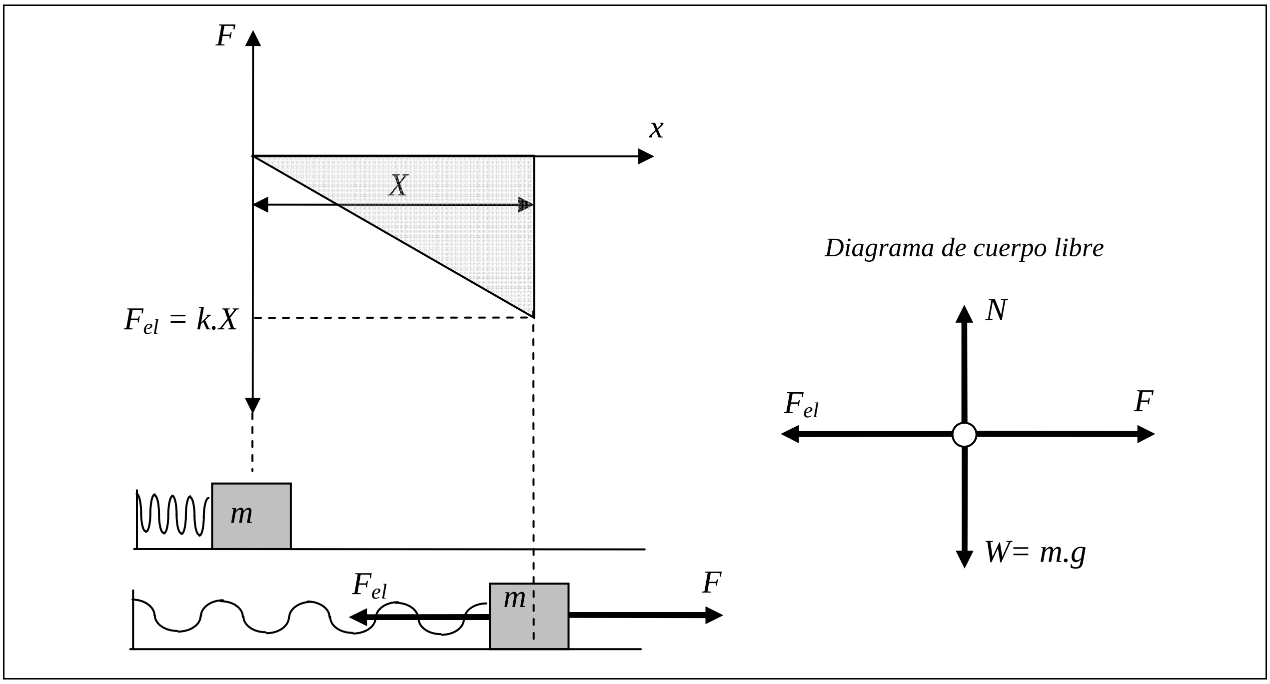
Se recalca que la energía potencial de un cuerpo depende de la referencia horizontal que se toma arbitrariamente. De aquí que si la partícula se encuentra sobre ese plano de referencia, su energía potencial gravitatoria será nula y resultará positiva si se encuentra por sobre o negativa si se encuentra por debajo del mismo.

Por lo tanto la variación de energía potencial gravitatoria entre dos puntos de un plano vertical, será independiente del nivel de referencia que se tome y resultará positivo si la partícula se eleva y negativa si desciende. Por lo que un cuerpo “ganará” energía potencial gravitatoria cuando se eleve verticalmente, “perderá” dicha energía si desciende y permanecerá exactamente igual si se traslada horizontalmente.

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

Dada una partícula de masa *m* que se mantiene unida al extremo de un resorte que puede moverse sobre una superficie horizontal sin rozamiento mientras que el otro extremo del resorte se mantiene fijo.

Si ahora se aplica una fuerza *F* sobre la partícula, esta se desplazará de acuerdo a una ley de variación según se representa en la figura:



Tanto el trabajo del peso *mg* de la partícula como de la fuerza normal ejercida por la superficie horizontal, son nulos porque el desplazamiento es perpendicular a las mismas.

La fuerza *F* es igual y opuesta a la que realiza el resorte sobre la misma partícula que denominamos F_{el}.

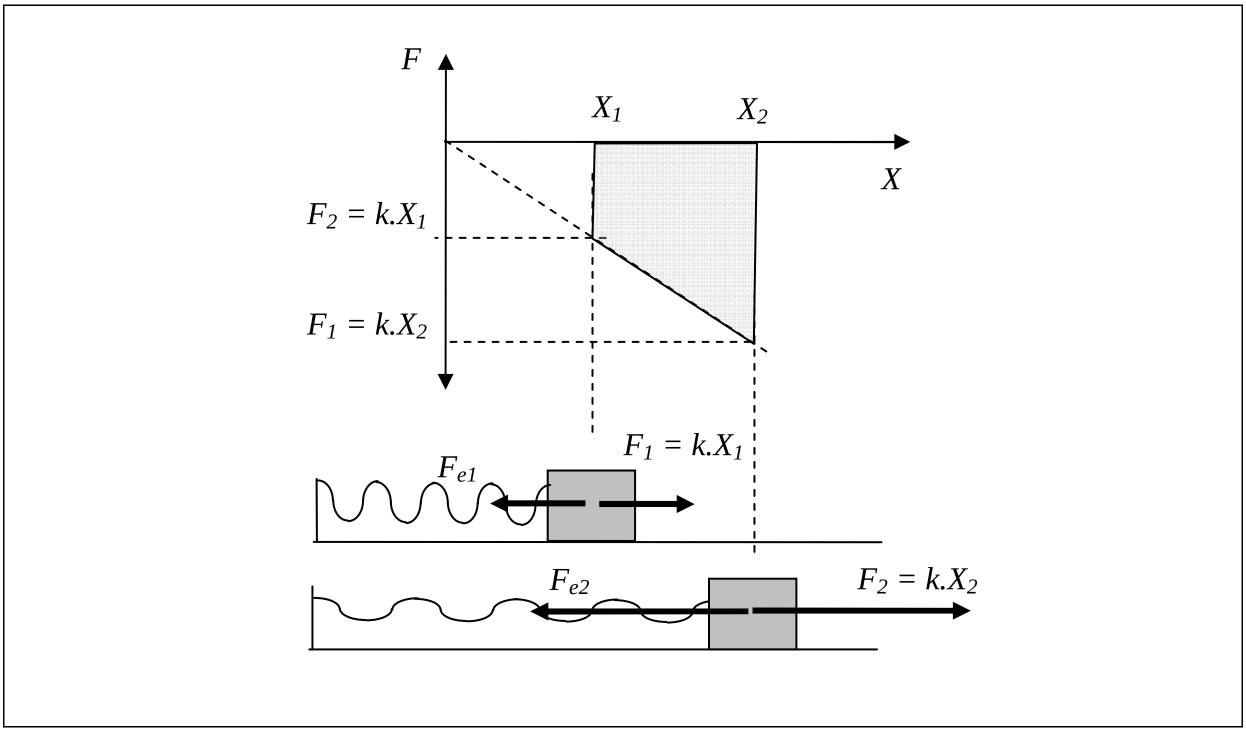
El trabajo de esta fuerza dirigida hacia la izquierda entre la posición de equilibrio y la posición *X*, elongación que genera un desplazamiento hacia la derecha, está dada por el área del triángulo de base *X* y altura *k X* quedando:

$$W_e = -\frac{1}{2}.(X).(K.X)$$
$$W_e = -\frac{1}{2}.k.X^2$$

De esta última expresión se establece que el trabajo de la fuerza elástica es igual al valor negativo de la variación de la energía potencial elástica dada por la expresión:

$$U_e = \frac{1}{2}k.X^2$$

Para un resorte dado, la energía potencial elástica solo depende de su deformación (en este caso *X*) y de su constante elástica *k*.
Suponiendo que en el sistema anterior se tiene un alargamiento previo dado por X_1 y a partir de allí se genera un nuevo aumento del alargamiento hasta llegar a la posición final X_2, según se muestra en la figura:



El trabajo de la fuerza elástica, necesario para realizar el nuevo alargamiento estará dado por el área del trapecio sombreado por lo que la expresión del trabajo quedará como:

$$W_{1-2} = (-\frac{1}{2}k.X_2 \cdot X_2) - (-\frac{1}{2}k.X_1 \cdot X_1)$$
$$W_{1-2} = -\frac{1}{2}kX_2^{\,2} + \frac{1}{2}kX_1^{\,2}$$
$$W_{1-2} = -U_{e2} + U_{e1} = -\Delta U_e$$

El incremento de energía potencial elástica resulta igual y de signo opuesto al trabajo de la fuerza elástica.

TEOREMA DEL TRABAJO PARA FUERZAS CONSERVATIVAS

Una fuerza se denomina conservativa si el trabajo que realiza en una trayectoria cerrada es nulo, por lo que en este tipo de fuerzas el trabajo sobre un cuerpo depende solamente de las posiciones inicial y final como se vio para el caso de la fuerza gravitatoria y la fuerza elástica.
Si en un sistema mecánico actúan solo estas dos fuerzas, el trabajo neto resulta igual a la suma del trabajo realizado por cada una de ellas. La expresión correspondiente será:

$$W_{NETO} = W_g + W_{el}$$

Considerando que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es igual a la variación de su energía potencial con signo cambiado, se tiene:

$$W_g + W_{el} = -\Delta U_g - \Delta U_{el}$$
$$W_g + W_{el} = -(U_{g2} - U_{g1}) - (U_{el2} - U_{el1})$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética, se puede escribir finalmente:

$$-(U_{g2} - U_{g1}) - (U_{el2} - U_{el1}) = K_2 - K_1$$
$$K_1 + U_{g1} + U_{el1} = K_2 + U_{g2} + U_{el2}$$
$$E_1 = E_2 \quad o \quad \Delta E = 0$$

TEOREMA DEL TRABAJO PARA FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Una fuerza se denomina no conservativa si el trabajo que realiza en una trayectoria cerrada es diferente de cero, por lo que en este tipo de fuerzas el trabajo sobre un cuerpo depende de la trayectoria descripta y no de sus posiciones extremas. Como ejemplo de este tipo de fuerzas se puede mencionar a aquellas diferentes a las conservativas.
Es importante destacar que el trabajo de las fuerzas no conservativas no es producido exclusivamente por fuerzas disipativas como las de rozamiento. Por ejemplo si se empuja un objeto sobre una superficie horizontal sin rozamiento, el trabajo ejercido por la fuerza aplicada no conserva la cantidad de energía inicial del sistema, generando un aumento de la energía mecánica que en este caso corresponde a la energía cinética (ya que el movimiento es horizontal sin que varíe la energía potencial).
Si en un sistema mecánico actúan tanto fuerzas conservativas como no conservativas, el trabajo neto resulta igual a la suma del trabajo realizado por cada una de ellas. La expresión correspondiente será:

$$W_{NETO} = W_{NO\ CONSERVATIVO} + W_{CONSERVATIVO}$$

El primer término corresponde al trabajo de las fuerzas no conservativas (también denominado trabajo de otras fuerzas) que actúan sobre el sistema. El segundo término corresponde al trabajo de las fuerzas conservativas que es igual a la variación de su energía potencial con signo cambiado.
Finalmente se tiene:

$$W_{NETO} = W_{NC} - \Delta U$$

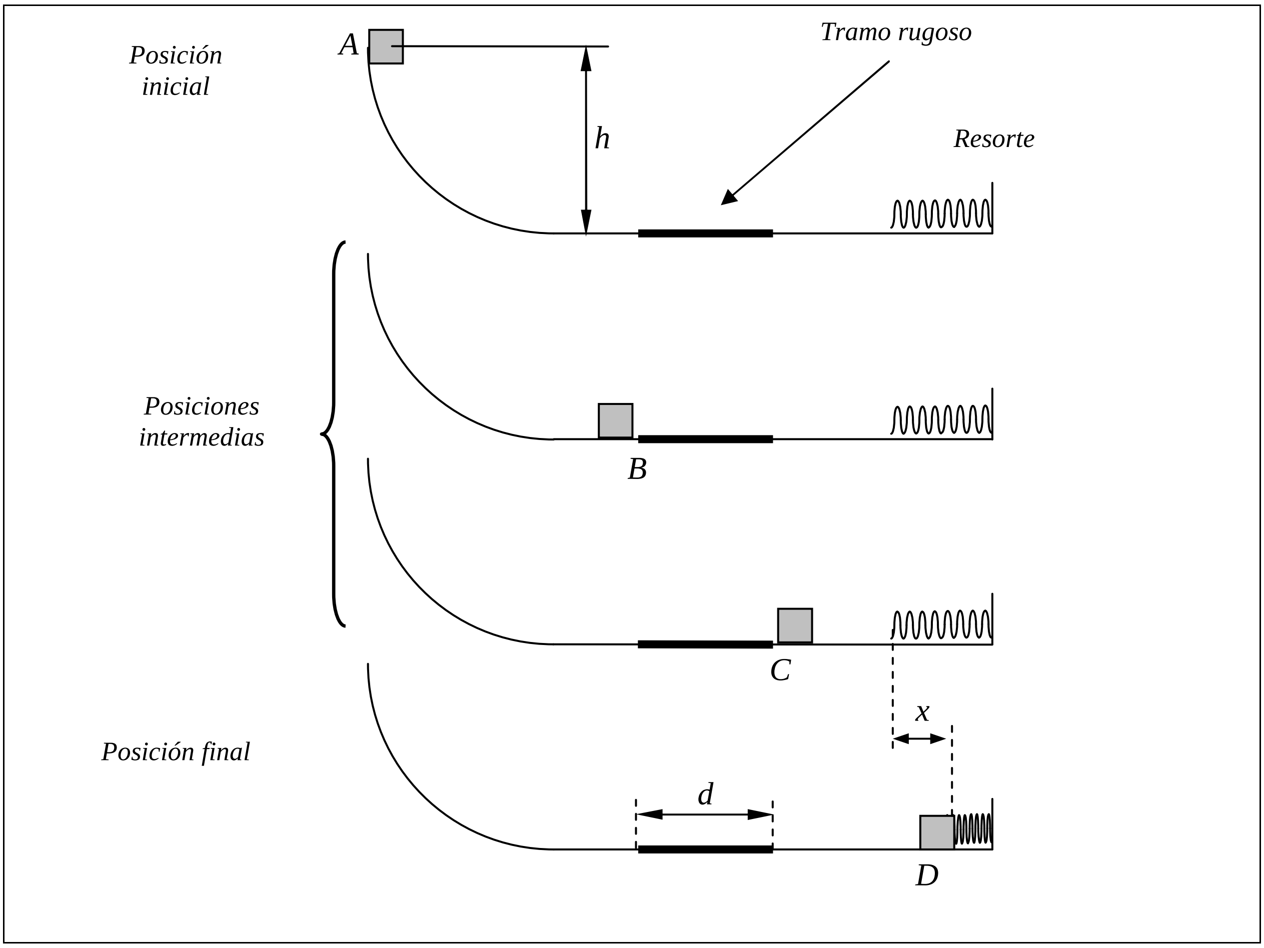
Aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética que expresa:

$$W_{NETO} = \Delta K$$

Operando algebraicamente se tiene:

$$W_{NC} - \Delta U = \Delta K$$
$$W_{NC} = \Delta U + \Delta K$$
$$W_{NC} = \Delta E$$

En el siguiente ejemplo se aplican los conceptos desarrollados.
El esquema muestra un cuerpo de masa *m* que se desliza por la rampa teniendo un tramo con rozamiento según se indica.



El cuerpo se libera de la posición A sin velocidad inicial y desde una altura *h* medida desde la parte horizontal de la rampa que es tomada arbitrariamente como nivel de referencia de energía potencial cero.
La energía mecánica inicial del sistema vale:

$$E_A = K_A + U_{gA} + U_{elA}$$
$$E_A = 0 + m.g.h + 0$$

Estando el cuerpo en la posición B, su energía mecánica del sistema vale:

$$E_B = K_B + U_{gB} + U_{elB}$$
$$E_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_B^2 + 0$$

Como no actúan fuerzas de rozamiento en el tramo analizado, la energía mecánica se conserva quedando:

$$E_A = E_B$$
$$mgh = \frac{1}{2} m V_B^2$$

Esta ecuación expresa que la energía potencial que posee la masa *m* en la posición *A* se transforma enteramente en energía cinética en la posición *B.*
Aplicando el teorema del trabajo y la energía entre las posiciones *B* y *C*, se tiene:

$$W_{B-C} = \Delta K_{B-C}$$
$$\vec{F}roz.\vec{d} = \frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_B^2$$
$$-Froz.\,d = \frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_B^2$$

Debido al signo negativo del primer término se puede deducir que la velocidad del cuerpo sobre la superficie rugosa disminuye, lo cual es lógico debido a la fuerza de roce.
El cuerpo abandona la zona rugosa con la velocidad V_C manteniéndola hasta el momento que toca el resorte. A partir de ese instante la masa se comienza a disminuir su velocidad hasta detenerse en la posición *D* debido a la acción del resorte al comprimirse una distancia *x*.
La energía mecánica correspondiente a la posición *C*, vale:

$$E_C = K_C + U_{gC} + U_{elC}$$
$$E_C = \frac{1}{2} m.V_C^2 + 0 + 0$$

La energía mecánica correspondiente a la posición final *D*, queda:

$$E_D = K_D + U_{gD} + U_{elD}$$
$$E_D = 0 + 0 + \frac{1}{2} k.x^2$$

Como la energía mecánica se conserva queda:

$$E_C = E_D$$

Finalmente luego de la igualación queda:

$$\frac{1}{2} m V_C^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

De esta última expresión se deduce que la energía cinética que posee la masa antes de que toque el resorte se convierte enteramente en energía potencial elástica.
Si se continúa con el análisis para posiciones posteriores a las mostradas, el cuerpo no podrá regresar a la posición *A* debido a las “pérdidas” que se generan cada vez que pase por sobre el tramo rugoso, sobre el que quedará finalmente cuando disipe la energía inicial *m.g.h* mediante el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en sus sucesivos pasajes por la misma. La energía disipada valdrá *n.Froz.d* siendo *n* la cantidad de veces que pasa por sobre la pista rugosa.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Sean dos cuerpos que se mueven a igual velocidad pero uno posee una masa m_1 mucho mayor que el otro de masa m_2. Es diferente el comportamiento de ambos cuerpos si, por ejemplo, se los quiere detener a ambos en el mismo lapso de tiempo o si, encontrándose ambos en reposo se los quiere mover hasta conseguir la misma velocidad final en el mismo lapso de tiempo.
Para estudiar este fenómeno se comenzará analizando un ejemplo sencillo como el de una partícula de masa *m* constante a la que se le aplica una fuerza y para un instante dado, la aceleración estará dada de acuerdo a la segunda ley de Newton por:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Se definirá al término entre paréntesis como c*antidad de movimiento* o *momento lineal* de una partícula y se utilizará como nomenclatura:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Si la velocidad está dada por la expresión vectorial:

$$\vec{v} = v_x \cdot \breve{i} + v_y \cdot \breve{j} + v_z \cdot \breve{k}$$

Si se expresa la cantidad de movimiento como:

$$\vec{p} = p_x \cdot \breve{i} + p_y \cdot \breve{j} + p_z \cdot \breve{k}$$

Finalmente se tiene:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

La unidad de la cantidad de movimiento en el Sistema Internacional es:

$$(p) = \left(kg \cdot \frac{m}{s} \right)$$

TEOREMA DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La segunda ley de Newton fue expresada originalmente en términos de la cantidad de movimiento como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Reordenando la expresión anterior, se tiene:

$$\vec{F} \cdot dt = d\,\overrightarrow{p}$$

Si se integra la expresión dada más arriba entre los intervalos de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, se, tendrá:

$$\vec{F} \cdot dt = d\,\vec{p}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \int_{p_1}^{p_2} d\,\vec{p}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

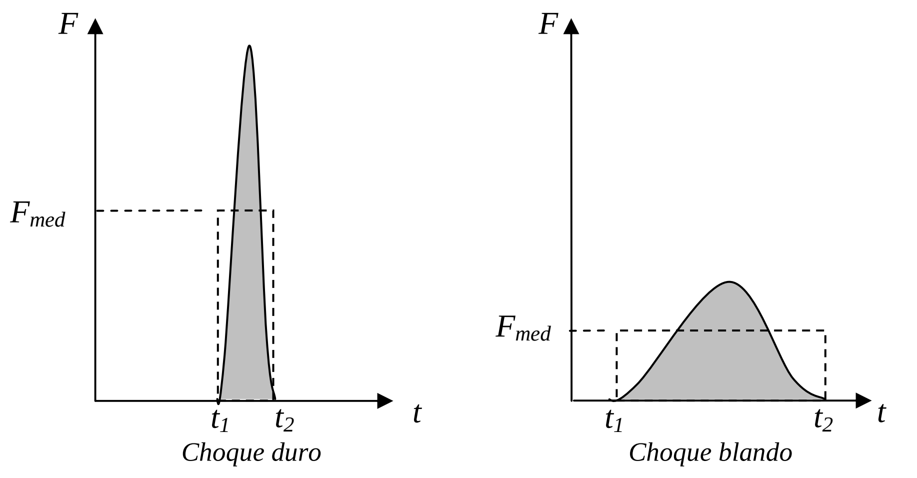
Al primer término de la expresión anterior se lo definirá como *Impulso de la fuerza neta*, identificándolo con la letra J y corresponderá al producto de esa fuerza neta por el intervalo de tiempo en el cual esta actúa.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

La unidad del impulso en el Sistema Internacional es:

$$(J) = (N \cdot s)$$

Este tipo de interacciones de fuerzas que actúan en intervalos de tiempo tan pequeños son muy difíciles de medir, no así la cantidad de movimiento de una masa, ya sea esta tan grande como la masa de los planetas que se mueven a velocidades enormes o la de los átomos moviéndose a velocidades cercanas a la de la luz. Por lo tanto el impulso se puede determinar experimentalmente midiendo las cantidades de movimiento inicial y final.
Si se grafica la fuerza neta en función del tiempo, se podrá tener dos tipos de representaciones:



La primera corresponde, por ejemplo, al impulso recibido por una bola de billar al ser golpeada por el taco mientras que la segunda gráfica puede representar al impulso recibido por una pelota de fútbol al ser pateada.
Se debe tener en cuenta que el intervalo en el que se produce la interacción es muy breve (dibujado fuera de escala) y el área sombreada equivale a la variación de la cantidad de movimiento que experimenta la masa involucrada variando su velocidad en una cantidad $\Delta V = V_2 - V_1$.

El impulso ejercido por una fuerza neta en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ equivale al cambio de la *cantidad de movimiento*. Se hace notar que la diferencia entre las cantidades de movimiento es una resta entre vectores.
En este teorema se toma en cuenta que las fuerzas que obran en los choques son muy intensas (denominadas también fuerzas impulsivas) en intervalos de tiempo muy pequeños y debido a ello es que se desprecian las otras fuerzas externas que actúan simultáneamente.

TEOREMA DE CONSERVACIÓN

Dado un sistema aislado compuesto por dos masas que colisionan entre sí, donde la sumatoria de las fuerzas externas vale cero, las únicas fuerzas actuantes son las fuerzas impulsivas (internas al sistema analizado). Estas fuerzas obedecen a la tercera ley de Newton estableciendo la siguiente igualdad:

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$$

Operando algebraicamente y expresando la fuerza en función de la cantidad de movimiento, queda:

$$\vec{F}_{1-2} + \vec{F}_{2-1} = 0$$
$$\vec{F}_{1-2} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$$
$$\vec{F}_{2-1} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = 0$$
$$\frac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t} = 0$$
$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

Esta última expresión indica que la cantidad de movimiento total del sistema se conserva, siendo esta exactamente igual antes y después de la colisión:

$$\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)_{inicial} = \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)_{final}$$

Reemplazando cada término por sus correspondientes cantidades de movimiento, se tendrá:

$$(m_1 \cdot \vec{v}_{1-i} + m_2 \cdot \vec{v}_{2-i}) = (m_1 \cdot \vec{v}_{1-f} + m_2 \cdot \vec{v}_{2-f})$$

Se resalta la característica vectorial de los términos.
Resumiendo: si *la fuerza externa resultante que obra sobre el sistema es nula, la cantidad de movimiento total del mismo permanece constante* siendo este el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

CENTRO DE MASA

Se define el centro de masa de un sistema de partículas como el lugar geométrico donde se podría considerar teóricamente concentrada toda la masa del sistema y se determina, de acuerdo con las siguientes expresiones, para un cuerpo de masa distribuida espacialmente.

$$X_{CM} = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$Y_{CM} = \frac{m_1.y_1 + m_2.y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$Z_{CM} = \frac{m_1.z_1 + m_2.z_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Desde el punto de vista vectorial, si se conoce el vector posición de cada una de las partículas que integran el sistema o cuerpo en cuestión, el vector posición del centro de masa estará dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

Al derivar el vector posición del centro de masa respecto al tiempo, se obtiene:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...} = \frac{\sum_{1=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

El denominador de esta última expresión corresponde a la masa total del sistema, por lo tanto la ecuación anterior se la puede escribir como:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{.\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Al derivar el vector velocidad del centro de masa respecto al tiempo, se obtiene:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\left(\vec{V}_{CM}\right)}{dt} = \frac{m_1 . \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 . \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i . \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Finalmente queda:

$$a_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_{EXT}}{M}$$

Cuando actúan fuerzas externas sobre un cuerpo o una colección de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada ahí y la fuerza neta sobre ella fuera la suma de las fuerzas externas sobre el sistema.
Las interacciones entre partículas del sistema pueden cambiar las cantidades de movimiento individuales de las partículas, pero, la cantidad de movimiento total del sistema solo puede cambiar si actúan fuerzas externas sobre el sistema.
Si la aceleración del centro de masa es cero, su velocidad es constante, por lo tanto la cantidad de movimiento total permanece constante.

CHOQUES

Se define como colisión o choque entre dos cuerpos puntuales a un proceso de interacción, de contacto o a distancia[28] y de duración muy corta y que solo tiene lugar cuando los dos cuerpos se encuentran muy próximos entre sí, habiendo intercambio de energía y cantidad de movimiento.
El mecanismo de interacción puede ser elástico (dos bolas de billar, la pelota de fútbol y el jugador, etc.), nuclear (colisión de un neutrón con el núcleo), etc. y los teoremas de conservación permiten vincular el estado inicial de los cuerpos y el correspondiente estado final de cada uno de ellos independientemente del proceso de choque generalmente muy complicado y difícil de medir.
Un ejemplo de ello es el juego de billar donde el jugador puede predecir cómo debe dirigir la bola para que al impactar otra logre la velocidad deseada en ambas logrando que una entre a la tronera y la otra no. Este es un típico caso de choque en dos direcciones.

CHOQUES EN UNA DIMENSIÓN

Para comenzar el análisis de colisiones se comenzará con el caso de choque en una sola dirección, que corresponde al de dos masas que se mueven siempre sobre la misma recta antes y después del impacto.
Si ambas masas se encuentran aisladas y se analiza el sistema desde una referencia fija a su centro de masa[29], el impulso lineal total será nulo, pudiendo expresar:

[28] Las interacciones a distancia son las electrostáticas y las nucleares que se verán en otros cursos de física.
[29] Se debe resaltar la importancia de este concepto a fin de comprender correctamente el fenómeno. Si existen dudas al respecto se sugiere repasar los mismos antes de continuar la lectura.

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = 0$$
$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$
$$m_1 \cdot (\vec{V}_{1F} - \vec{V}_{1I}) + m_2 \cdot (\vec{V}_{2F} - \vec{V}_{2I}) = 0$$
$$m_1 \cdot (\vec{V}_{1F} - \vec{V}_{1I}) = -m_2 \cdot (\vec{V}_{2F} - \vec{V}_{2I})$$

Reagrupando los términos de manera que se tenga en el primero la cantidad de movimiento inicial del sistema y en el segundo la cantidad de movimiento final, se tendrá:

$$m_1 \cdot \vec{V}_{1F} + m_2 \cdot \vec{V}_{2F} = m_1 \cdot \vec{V}_{1I} + m_2 \cdot \vec{V}_{2F}$$

Este principio de conservación de la cantidad de movimiento se cumple para los tres tipos de choques a saber:

- Choque perfectamente elástico[30], cuando no existe pérdida de energía cinética entre los cuerpos, de modo que esta se mantiene igual antes y después de la colisión.
- Choque perfectamente inelástico, cuando se produce la máxima variación negativa de la energía cinética, quedando los cuerpos adheridos con la misma velocidad final.
- Entre estos dos extremos se encuentran los choques inelásticos para los cuales existe pérdida de energía cinética.
- Choques elásticos, para este tipo de choque las ecuaciones que permiten analizar el comportamiento de los cuerpos es

$$m_1 \cdot \vec{V}_{1F} + m_2 \cdot \vec{V}_{2F} = m_1 \cdot \vec{V}_{1I} + m_2 \cdot \vec{V}_{2F}$$

Como esta colisión es en una sola dirección se puede expresar las cantidades vectoriales como magnitudes escalares siendo positivo si el movimiento es hacia la derecha y negativo para el movimiento hacia la izquierda, quedando:

$$m_1 \cdot V_{1F} + m_2 \cdot V_{2F} = m_1 \cdot V_{1I} + m_2 \cdot V_{2F}$$

Para las cantidades de energía cinética, se cumple que:

$$K_I = K_F$$
$$\left(\frac{1}{2} m_1 \cdot {V_{1I}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot {V_{2I}}^2\right) = \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot {V_{1F}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot {V_{2F}}^2\right)$$

Trabajando algebraicamente los términos de ambas ecuaciones, se tendrá:

$$m_1 \cdot \vec{V}_{1F} - m_1 \cdot \vec{V}_{1I} = m_2 \cdot \vec{V}_{2F} - m_2 \cdot \vec{V}_{2F}$$
$$m_1 \cdot \left(\vec{V}_{1F} - \vec{V}_{1I}\right) = m_2 \cdot \left(\vec{V}_{2F} - \vec{V}_{2F}\right) \qquad (1)$$

y

[30] Existe otra forma de denominar las colisiones por lo que se sugiere prestar atención. Por ejemplo, son equivalentes los términos inelástico, perfectamente inelástico y plástico. De igual manera con los términos elástico, parcialmente elástico y perfectamente inelástico.

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot V_{1I}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 \cdot V_{2I}^{\ 2} = \frac{1}{2}m_1 \cdot V_{1F}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 \cdot V_{2F}^{\ 2}$$
$$m_1 \cdot V_{1I}^{\ 2} + m_2 \cdot V_{2I}^{\ 2} = m_1 \cdot V_{1F}^{\ 2} + m_2 \cdot V_{2F}^{\ 2}$$
$$m_1 \cdot V_{1I}^{\ 2} - m_1 \cdot V_{1F}^{\ 2} = m_2 \cdot V_{2F}^{\ 2} - m_2 \cdot V_{2I}^{\ 2}$$
$$m_1 \cdot \left(V_{1I}^{\ 2} - V_{1F}^{\ 2}\right) = m_2 \cdot \left(V_{2F}^{\ 2} - V_{2I}^{\ 2}\right)$$
$$m_1 \cdot (V_{1I} - V_{1F}) \cdot (V_{1I} + V_{1F}) = m_2 \cdot (V_{2F} - V_{2I}) \cdot (V_{2F} + V_{2I}) \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) y operando, se tendrá:

$$\frac{m_1 \cdot (V_{1I} - V_{1F}) \cdot (V_{1I} + V_{1F})}{m_1 \cdot (V_{1I} - V_{1F})} = \frac{m_2 \cdot (V_{2F} - V_{2I}) \cdot (V_{2F} + V_{2I})}{m_2 \cdot (V_{2F} - V_{2I})}$$
$$(V_{1I} + V_{1F}) = (V_{2F} + V_{2I})$$
$$V_{1I} - V_{2I} = -(V_{2F} - V_{1F})$$

Esto expresa que la velocidad relativa de las dos partículas en el instante inicial inmediatamente antes de colisionar es igual al negativo de la velocidad relativa inmediatamente después de colisionar.

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

Matemáticamente al coeficiente de restitución se lo define como el cociente de las velocidades relativas antes y después del choque con signo negativo:

$$e = -\frac{(V_{2F} - V_{1F})}{V_{1I} - V_{2I}}$$

El valor del coeficiente *e* determina el tipo de colisión entre ambas partículas, quedando:

$e=1 \rightarrow$ choque perfectamente elástico (no pierde energía)
$0<e<1 \rightarrow$ choque inelástico (pierde algo de energía)
$e=0 \rightarrow$ choque perfectamente inelástico (pierde la mayor cantidad de energía)

Choque inelástico
Como esta colisión es en una sola dirección, se puede expresar las cantidades vectoriales como magnitudes escalares siendo positivo si el movimiento es hacia la derecha y negativo para el movimiento hacia la izquierda, quedando:

$$m_1 \cdot V_{1F} + m_2 \cdot V_{2F} = m_1 \cdot V_{1I} + m_2 \cdot V_{2F}$$

Para las cantidades de energía cinética, se cumple que:

$$K_I = e \ . \ K_F$$
$$\left(\frac{1}{2}m_1 \cdot V_{1I}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 \cdot V_{2I}^{\ 2}\right) = e \ . \ \left(\frac{1}{2}m_1 \cdot V_{1F}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 \cdot V_{2F}^{\ 2}\right)$$

Otra forma de resolver los problemas de colisiones inelásticas en una sola dirección es trabajando con la expresión de la conservación de la cantidad de movimiento y el coeficiente de restitución.

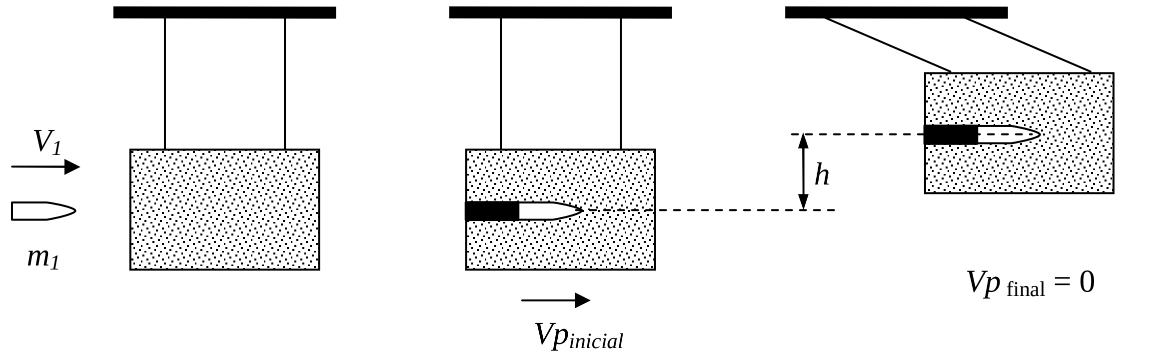
Choque perfectamente inelástico
Esta colisión continúa siendo en una sola dirección, y la característica principal es que las velocidades de ambos cuerpos son las mismas debido a que luego de la interacción permanecen unidos.
Se puede expresar entonces:

$$m_1 \cdot V_{1F} + m_2 \cdot V_{2F} = (m_1 + m_2) \cdot V_F$$

Para pensar
Si se dispara una ametralladora a una placa de acero ¿la fuerza media sobre la placa, debida a los impactos, es mayor si las balas rebotan o quedan adheridas a la placa?

PÉNDULO BALÍSTICO

Se denomina así al equipo diseñado para medir indirectamente la velocidad de un proyectil que viaja a grandes velocidades utilizando el concepto de choque perfectamente inelástico.
Este equipo es básicamente un péndulo cuya masa suspendida *M* es considerablemente mayor a la masa *m* del proyectil cuya velocidad V_1 se desea medir según se presenta en el siguiente esquema.



Situación inicial antes del impacto

El proyectil se introduce en el bloque quedando ambas masas unidas e iniciando estas el movimiento con una velocidad inicial del péndulo $V_{Pinicial}$

Ambas masas se elevan una distancia h.

Las dos primeras posiciones del sistema mostrado presentan un choque perfectamente inelástico y debido a que la resultante de las fuerzas exteriores o fuerza neta es cero, se conserva la cantidad de movimiento lineal pudiéndose expresar:

$$m_1 \cdot V_1 + M \cdot 0 = (M + m_1) \cdot Vp_{inicial}$$

Despejando la velocidad del proyectil queda:

$$V_1 = \frac{(M + m_1) \cdot Vp_{inicial}}{m_1}$$

La velocidad inicial, con la que ambas masas comienzan a moverse luego del impacto, determina la energía cinética que poseen ambas y que se transforma enteramente en energía potencial al detenerse cuando logran la altura *h*, por lo tanto se puede expresar utilizando consideraciones energéticas:

$$\frac{(M + m_1) \cdot (Vp_{inicial})^2}{2} = (M + m_1) \cdot g \cdot h$$

$$\frac{(Vp_{inicial})^2}{2} = g \cdot h$$

$$Vp_{inicial} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Reemplazando esta en la expresión anterior, queda:

$$V_1 = \frac{(M + m_1) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{m_1}$$

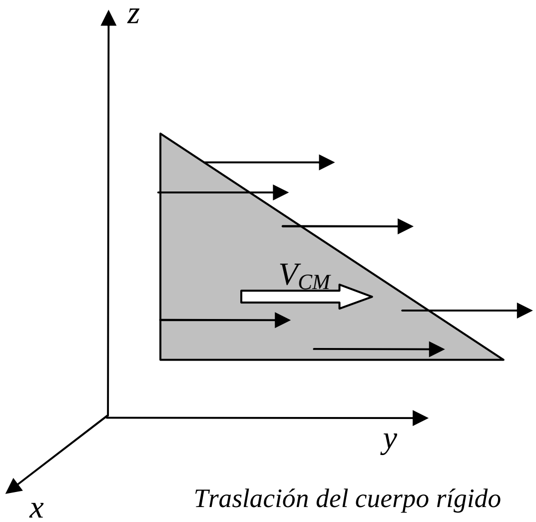
Midiendo las masas y la altura a la que se elevan estas, luego del choque, se puede determinar indirectamente la velocidad del proyectil.

CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

Un cuerpo rígido se define como un sistema de partículas que mantienen equidistantes sus posiciones relativas, independientemente de las acciones que se ejerzan sobre el mismo. Esta característica convierte al sistema de partículas en un cuerpo indeformable teóricamente.
Se estudiará el movimiento de estos cuerpos en el plano ya sea: trasladándose, rotando o ambos en forma simultánea, definido como rototraslación y su caso particular de rodadura.

TRASLACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

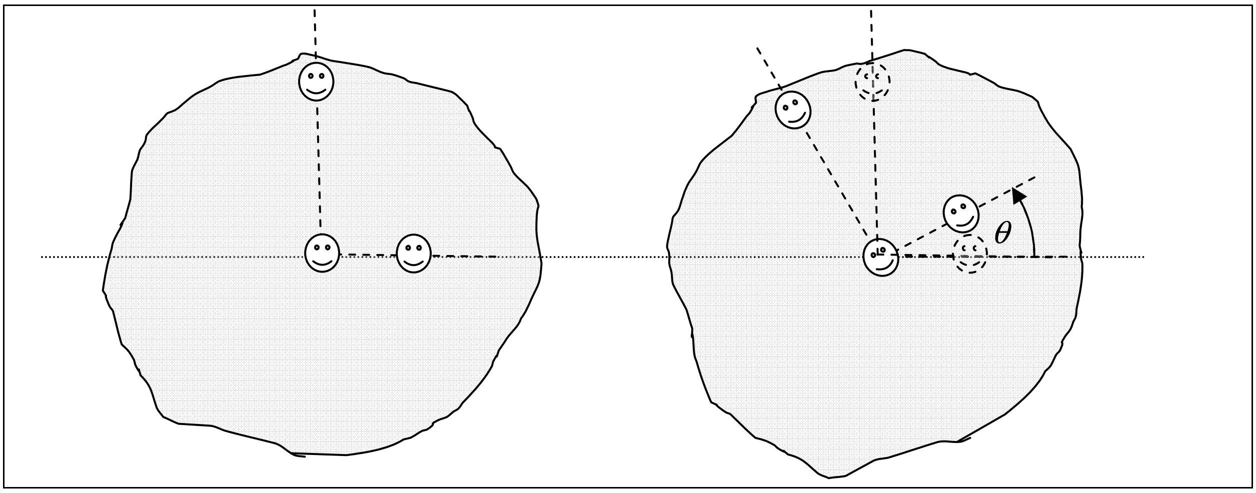
Si el cuerpo se traslada en forma rectilínea, ya sea con o sin aceleración, todas las partículas del cuerpo tendrán las mismas características cinemáticas (o sea la misma velocidad y aceleración) y las ecuaciones a aplicar son las mismas que las correspondientes a la cinemática de la partícula.
Se define la velocidad de un cuerpo rígido y homogéneo mediante un vector que se encuentre en el centro geométrico que en este caso coincide con el centro de masa.



Traslación del cuerpo rígido

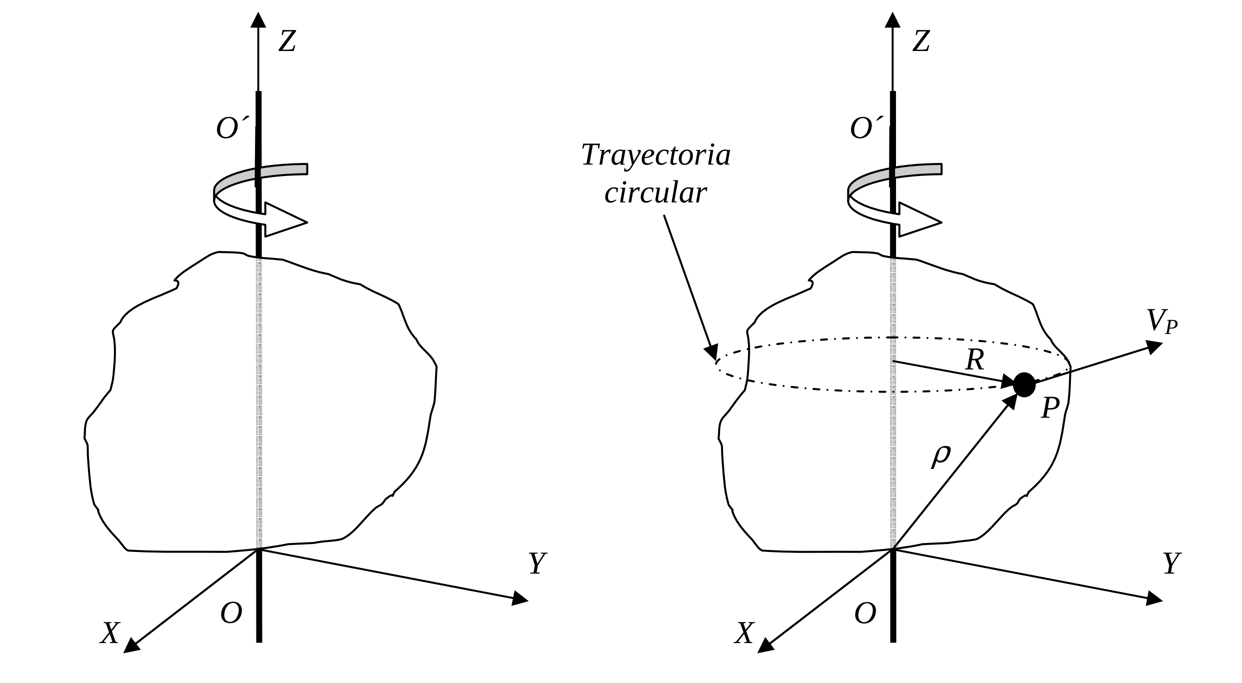
ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

Es interesante resaltar que para un ángulo de rotación θ, todas las partículas del cuerpo rígido experimentarán la misma rotación. Por ejemplo, si se analizan tres partículas de un mismo cuerpo rígido que gira un ángulo, como se puede apreciar en la figura, donde una de ellas se encuentra situada en el centro de giro y las otras a diferentes distancias del mismo. Se puede notar que el desplazamiento angular es el mismo para las tres partículas, no así el arco recorrido por cada una de ellas.



ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS EN EL ESPACIO

Se tiene un cuerpo rígido girando respecto a un eje fijo coincidente con el eje *z*, según se muestra en el esquema.



Cuerpo rígido girando en sentido positivo respecto del eje fijo en este caso coincidente con el eje de coordenadas cartesianas "Z".

La partícula P ubicada respecto del origen de coordenadas según el vector posición ρ, describirá una trayectoria circular de radio "R".

Si se analiza solo la trayectoria de la partícula *P*, se tiene que esta describe una circunferencia de radio *"R"* según se indica.
La cinemática del movimiento de cada una de las partículas que componen el cuerpo rígido responden a las ya vistas en los movimientos circulares.
Desde el punto de vista vectorial, la velocidad angular se representa con un vector tal que su módulo está representado por la rapidez angular, su dirección por la recta perpendicular al plano que contiene al desplazamiento angular y su sentido definido por la regla de la mano derecha.

Debido a que el vector velocidad cambia de dirección aparece la aceleración en la dirección centrípeta[31] que está dada en forma escalar por:

$$a = \frac{V^2}{R}$$

Vectorialmente esta aceleración centrípeta (o radial o normal) está mejor expresada como el producto vectorial de:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Esta última expresión es aconsejable debido a que provee toda la información relacionada a la dirección, sentido y módulo.

[31] Término que se refiere a que la dirección es hacia el centro de giro, también denominada dirección radial o normal a la trayectoria.

Ejemplo

Se tiene una pieza triangular de 3m, 4m y 5m de lado girando respecto a un eje perpendicular a la pieza que pasa por al vértice *O* con una velocidad angular constante de 20 rad/s de acuerdo al sentido que se muestra en la figura, es decir, saliente al plano del papel. La expresión de la velocidad tangencial para los vértices A y B se procede de la siguiente manera:

Solución en forma vectorial

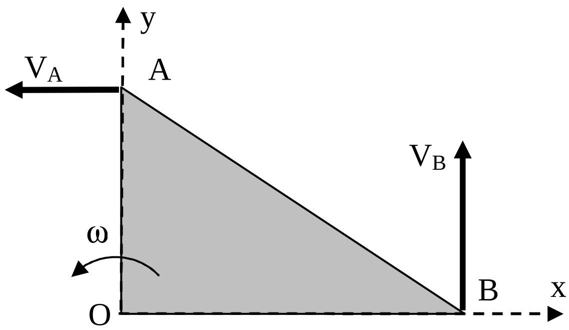
La velocidad del punto A está dada por:

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & OA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s)$$

Para el punto B se procede de igual manera, teniendo:

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & OB & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s)$$

Las velocidades halladas se pueden observar gráficamente en el esquema:



Si el cuerpo comienza a desacelerarse en forma constante a razón de $\alpha = 5\ 1/s^2$, las expresiones vectoriales correspondientes a los puntos *A* y *B* serán:

Para el punto A:

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_0 - \alpha.t \\ 0 & OA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20-5.t \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60+15.t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s)$$

Para el punto B:

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_0 - \alpha.t \\ OB & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20-5.t \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80-20.t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s)$$

Si se quiere conocer la expresión del espacio angular recorrido por el punto A se tendrá:

$$\Delta\theta_A = \omega_0.\Delta t + \frac{1}{2}.\alpha.(\Delta t)^2$$

$$\Delta\theta_A = 20.\Delta t + \frac{1}{2}.(-5).(\Delta t)^2$$

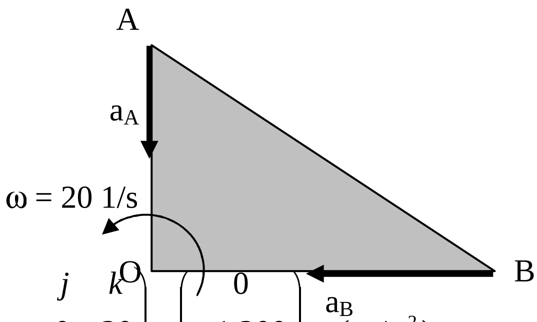
Si para el tiempo $t_0 = 0$ se tiene $\theta o = 0$, queda,

$$\theta_A = \omega_0.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2$$

Ejemplo

Se tiene la misma pieza triangular de 3m, 4m y 5m de lado con una velocidad constante de 201/s. Determine la expresión de la aceleración centrípeta para el punto A y B.

Solución en forma vectorial
La aceleración centrípeta del punto A esta dada por:



$$a_A = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA} = \vec{\omega}\times\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}\times\begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ -60 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.200 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s^2)$$

Para el punto B se procede de igual manera teniendo:

$$a_B = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{OB} = \vec{\omega}\times\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 80 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.600 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s^2)$$

Para el caso en el que el cuerpo rígido en rotación posea aceleración angular, la aceleración total de un punto del mismo estará dada por la suma vectorial de ambas y su módulo será:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_{Tg})^2 + (a_N)^2}$$

Esta expresión no indica la dirección de la aceleración total, por lo que es aconsejable utilizar la expresión vectorial de la misma, según se muestra:

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{R}$$

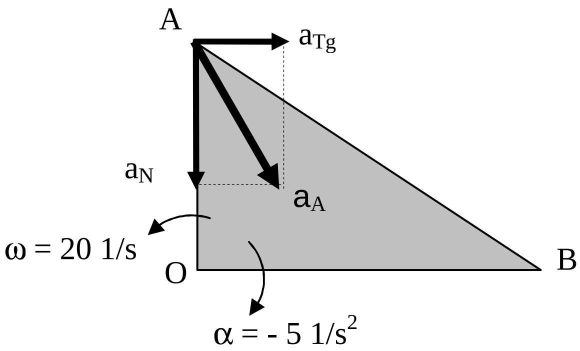
Ejemplo

Continuando con los ejemplos anteriores y para el caso de que exista aceleración angular α según se muestra en la figura, la aceleración total del punto A estará dada en forma vectorial por:

$$a_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s^2)$$

$$a_{Tg} = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & OA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s^2)$$

$$a_A = a_N + a_{Tg} = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -800 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (m/s^2)$$

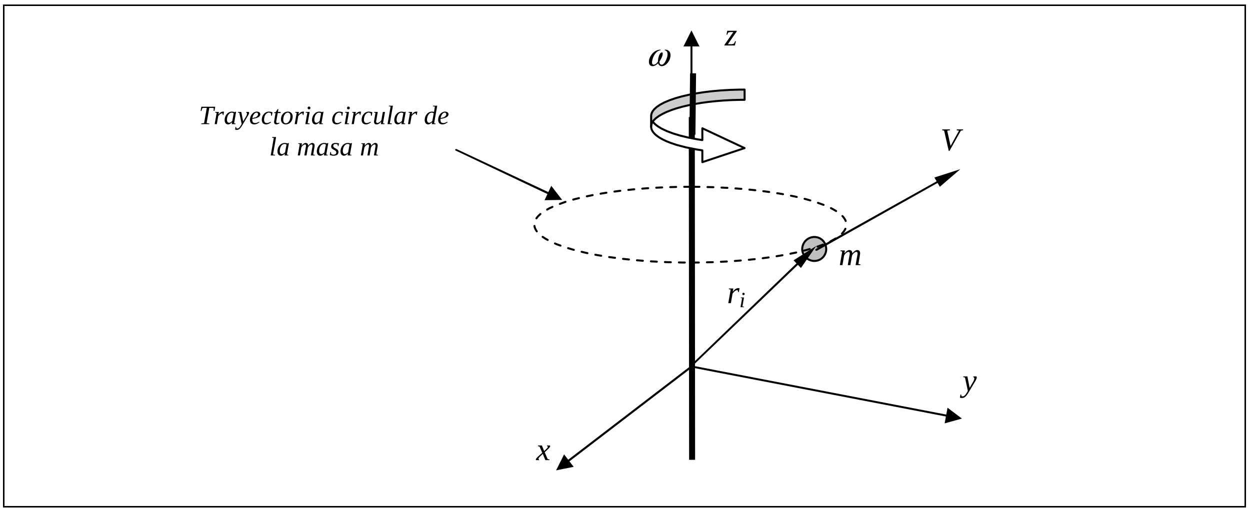


Nota: los vectores están dibujados fuera de escala.

ENERGÍA ROTACIONAL DE UNA PARTÍCULA

Dada una partícula de masa *m* girando respecto a un eje fijo a velocidad tangencial no necesariamente constante *V* según se muestra en la figura, la energía cinética en un instante dado valdrá:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$$



Sabiendo que la velocidad *V* en función de la velocidad angular se puede expresar como el producto vectorial:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Y el cuadrado de esta expresión es:

$$V^2 = \omega^2 \cdot r^2$$

Reemplazando esta expresión en la de la energía cinética de más arriba queda:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r^2$$

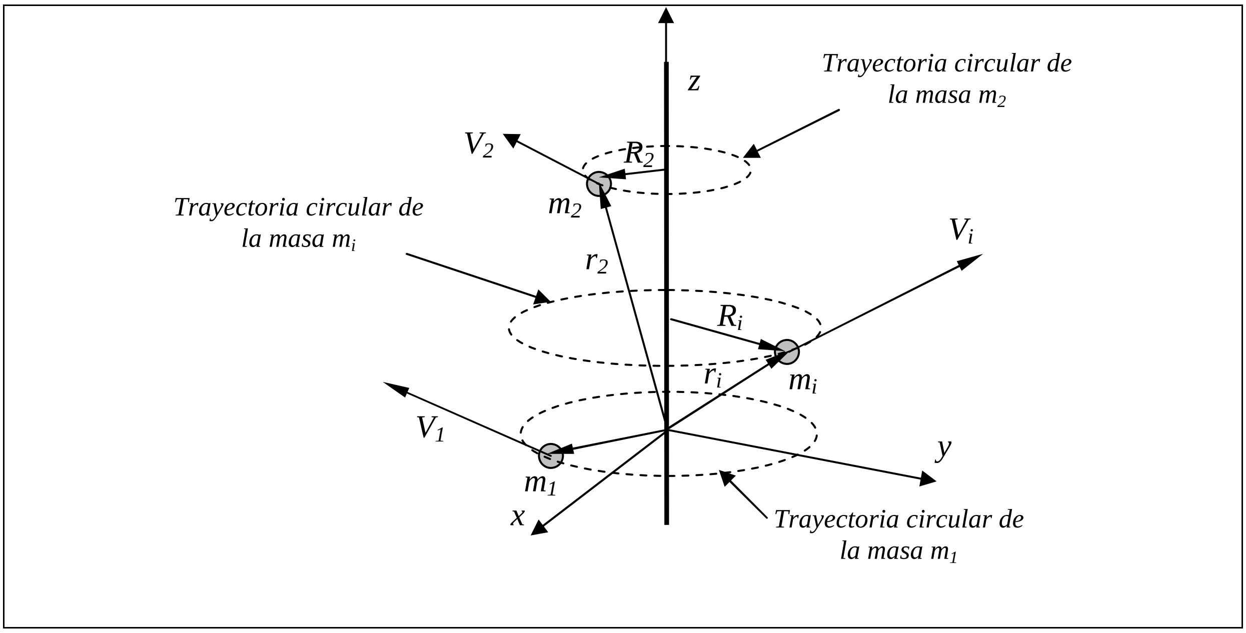
Reagrupando:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left(m \cdot r^2\right) \cdot \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

ENERGÍA ROTACIONAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Dado un sistema de partículas que se encuentran girando respecto a un mismo eje fijo de, forma independiente unas de otras según se muestra en la figura:



La expresión de la energía cinética del sistema queda:

$$K = \sum\left(\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot V_i^{\,2}\right)$$

En función de las velocidades angulares de cada una se puede expresar como:

$$K = \sum\left(\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot \omega_i^{\,2}\cdot R_i^{\,2}\right)$$

Siendo R_i los radios de las respectivas circunferencias que definen las trayectorias que aparecen en el esquema en línea de puntos. Es importante diferenciar este radio R_i del vector posición r_i de cada una de las masas respecto al origen de coordenadas definido arbitrariamente.
Para comprobar la relación que existe entre el vector posición y el radio de la trayectoria se muestra en siguiente cálculo.
Dada la velocidad angular ω_i y el vector posición r_i de una partícula que gira respecto a un eje fijo, en este caso coincidente con el eje z, la velocidad tangencial V_i estará dada por el producto vectorial:

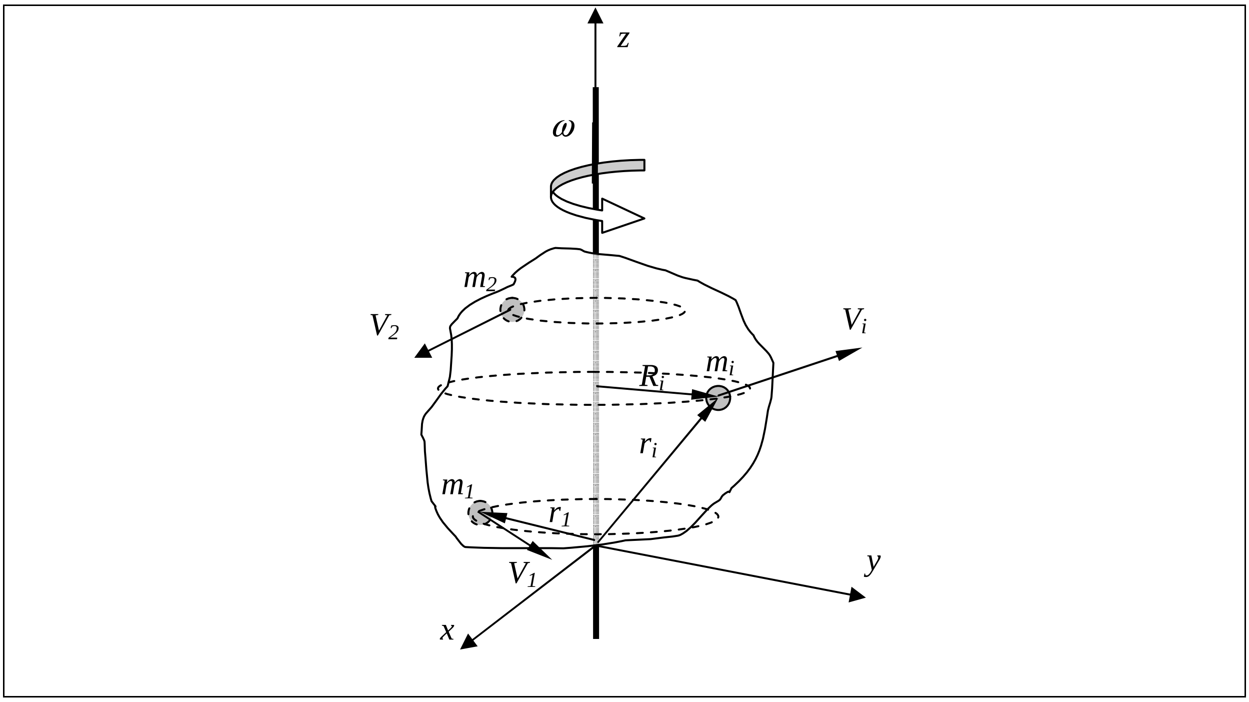
$$\vec{V}_i = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_i \\ r_{xi} & r_{yi} & r_{zi} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_i..r_{yi} \\ \omega_i..r_{xi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

El módulo de la velocidad V_i será:

$$\left|V_i\right| = \sqrt{(-\omega_i..r_{yi})^2 + (\omega_i..r_{xi})^2} = \omega_i.\sqrt{(-.r_{yi})^2 + (.r_{xi})^2} = \omega_i.\,R_i$$

ENERGÍA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

Dado un cuerpo rígido que se encuentra girando respecto a un eje fijo, no necesariamente que lo contenga, y que para este caso sea coincidente con el eje z según se muestra en la figura.



En un instante dado, el cuerpo rígido gira a una velocidad angular ω (no necesariamente constante), la energía cinética de una de sus partículas, la de masa m_i, se define como:

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot V_i^2$$

La energía cinética de todas las partículas del cuerpo rígido se obtiene como la sumatoria siguiente:

$$K = \sum \left(\frac{1}{2} \cdot m_i \cdot V_i^2 \right)$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot V_i^2$$

Sabiendo que la velocidad V_i en función de la velocidad angular se puede expresar como el producto vectorial:

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

El cuadrado de esta expresión, es:

$$V_i^2 = \omega^2 \cdot r_i^2$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de más arriba quedará:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2$$

Como las partículas del cuerpo rígido no pueden separarse entre sí, todas ellas poseen la misma velocidad angular, por lo que la expresión quedará:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

La expresión entre paréntesis, para el caso de un cuerpo rígido se define como momento de inercia respecto al eje de giro que, si coincide con el eje que pasa por el centro de masa, corresponderá al momento de inercia baricéntrico, quedando finalmente:

$$K = \frac{1}{2} \cdot I_z \cdot \omega^2$$

MOMENTO DE INERCIA

Ese concepto se encuentra asociado a la distribución de la masa de un cuerpo rígido, por lo que es importante resaltar la característica geométrica del mismo que se evidencia cuando se lo hace girar. Por ejemplo, si tenemos un paraguas cerrado y se lo hace girar alternativamente tomándolo por el mango, se comportará de forma diferente que si realizamos la misma acción pero con el paraguas abierto. Estando abierto costará más hacerlo girar que estando cerrado. A este fenómeno se lo define como *momento de inercia del cuerpo respecto de eje de giro.*
Así como la masa se pone de manifiesto al querer trasladar un cuerpo, el momento de inercia se evidencia al hacer girar el cuerpo y, cuanto mayor sea la aceleración angular, más se evidenciará el momento de inercia respecto al eje sobre el cual se lo hace girar.
Es importante recalcar que el momento de inercia es una magnitud geométrica y solo se lo hace girar para ponerlo en evidencia.
Por lo tanto, dada una partícula de masa m separada una distancia d de un eje, el momento de inercia I de dicha masa respecto a un eje de referencia está dado por la expresión:

$$I = m \cdot d^2$$

Para un sistema de partículas, el momento de inercia será la sumatoria de los momentos de inercia de cada una de ellas respecto al mismo eje, la expresión será:

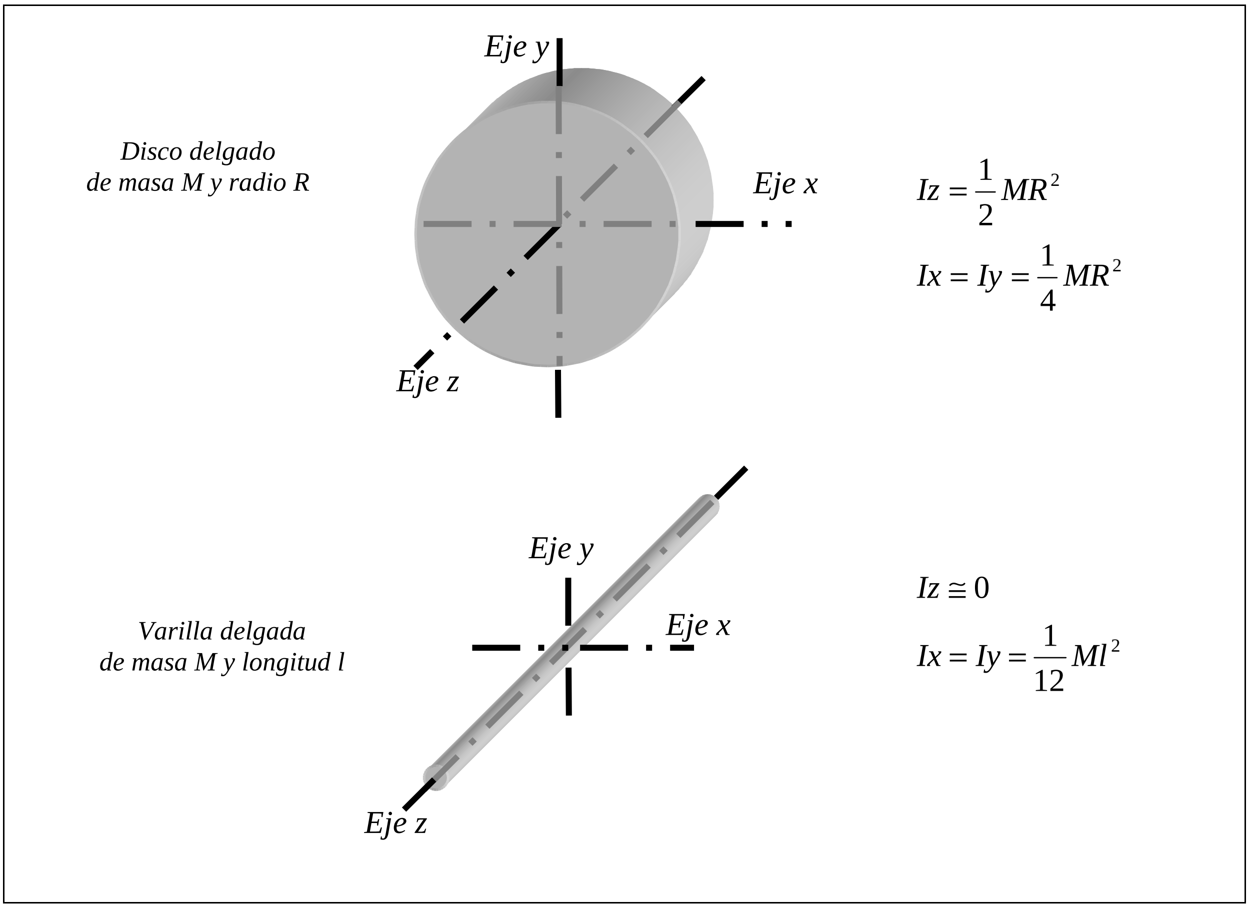
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot d_i^2$$

Para un cuerpo rígido, las partículas que lo componen permanecerán a igual distancia unas de otras y el momento de inercia se obtendrá realizando la integral:

$$I = \int d^2 \cdot dm$$

$$I = \int d^2 \cdot \rho \cdot dV$$

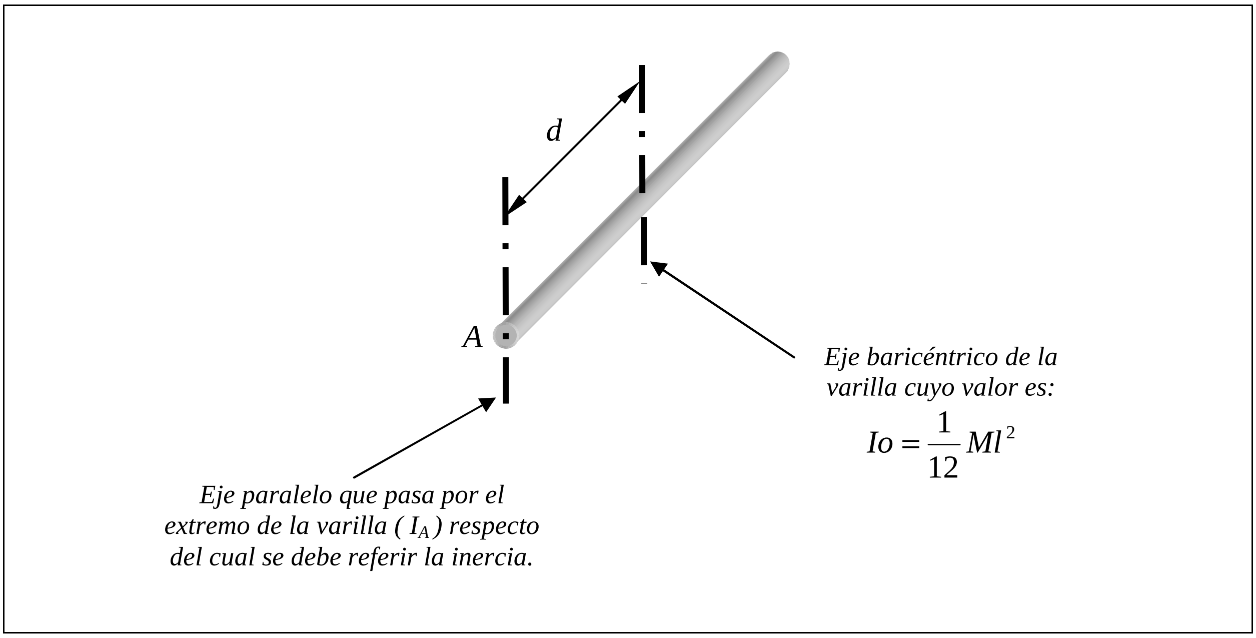
Suponiendo que la densidad ρ permanece constante (cuerpo homogéneo), para las diferentes figuras geométricas se obtendrán diferentes valores de momento de inercia. Si este está referido a los ejes que pasan por el centro de masa de la figura, los momentos de inercia se denominan momentos de inercia baricéntricos, alguno de los cuales se muestran a continuación:



Se resalta el valor del momento de inercia de la varilla respecto al eje z, este es despreciable ya que la distancia de separación de las partículas de la varilla respecto a este eje es muy pequeña y, si además se eleva al cuadrado ese valor, queda más pequeño aún por lo que se puede considerar nulo.
Para el resto de los cuerpos se siguiere remitirse a las tablas que se encuentran en los libros de texto de física.

TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

Por ejemplo, si se hace girar una varilla tomándola del medio, el efecto será diferente a que si se la hace girar tomándola de uno de sus extremos. A diferencia del paraguas, la varilla no cambia su distribución de masa, solo el eje respecto del cual se la hace girar y esto se debe a que, al tomar la varilla del extremo, la masa se encuentra distribuida en forma diferente, existiendo más masa alejada del eje de giro y, como el momento de inercia está más afectado por la distribución de la masa (ya que la distancia está elevada al cuadrado) que de la masa misma, se concluye que la inercia de la varilla respecto a un eje que pase por un extremo es mayor que respecto al eje que pasa por el centro geométrico (o baricéntrico).
La demostración detallada del teorema de Steiner o de ejes paralelos se puede encontrar en cualquier libro de texto de física, lo que a continuación se presentará es la aplicación del mismo. Para tal fin se ejemplificará el caso concreto de una varilla delgada cuyo momento de inercia baricéntrico se conoce y se desea determinar el momento de inercia respecto del eje que pasa por uno de sus extremos.
Concretamente, el teorema especifica que, el momento de inercia respecto a un eje cualquiera paralelo al baricéntrico es igual al momento de inercia baricéntrico más el producto de la masa del cuerpo multiplicada por el cuadrado de la distancia de separación de los ejes paralelos en cuestión, de acuerdo al siguiente esquema:



El Teorema de Steiner o de los ejes paralelos expresa que:

$$I_A = I_0 + m \cdot d^2$$

Aplicado a la varilla del esquema queda:

$$I_A = \frac{1}{12} + m \cdot l^2 + m \cdot d^2$$

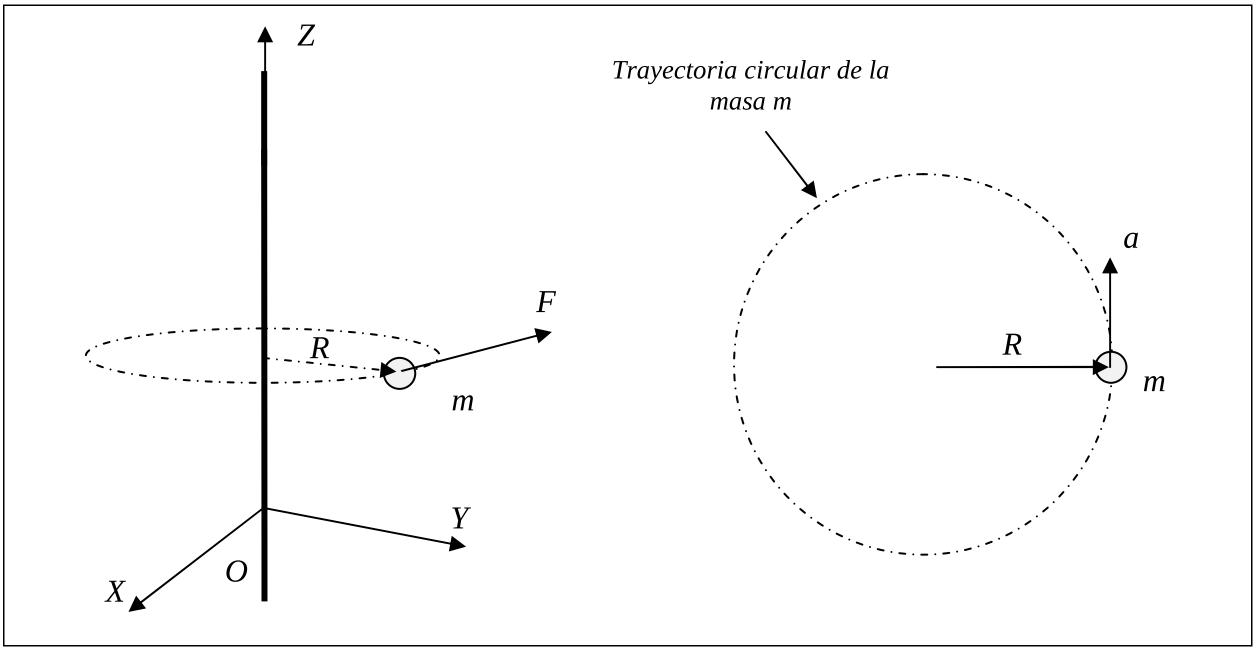
Como *d* para este caso es la mitad de la longitud de la varilla, la expresión finalmente queda:

$$I_A = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 =$$
$$I_A = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4} =$$
$$I_A = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

Se puede observar que el momento de inercia de la varilla respecto del eje que pasa por los extremos es cuatro veces mayor que el baricéntrico. De aquí se desprende que cualquier valor del momento de inercia que no sea el baricéntrico será siempre mayor que este.

MOMENTO DE TORSIÓN Y ACELERACIÓN ANGULAR

Se tiene una única partícula de masa *m* que se encuentra a una distancia *R* fija respecto de un eje sobre el cual puede girar libremente. Si se aplica, sobre esta una fuerza tangencial constante *F* se genera un momento que la hará girar cada vez más rápido, según se muestra en el esquema:



De la definición de momento o torque, se tiene que:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

El módulo del momento torsor vale:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{R} \times \vec{F}| = |\vec{R}|.|\vec{F}|.sen\theta$$

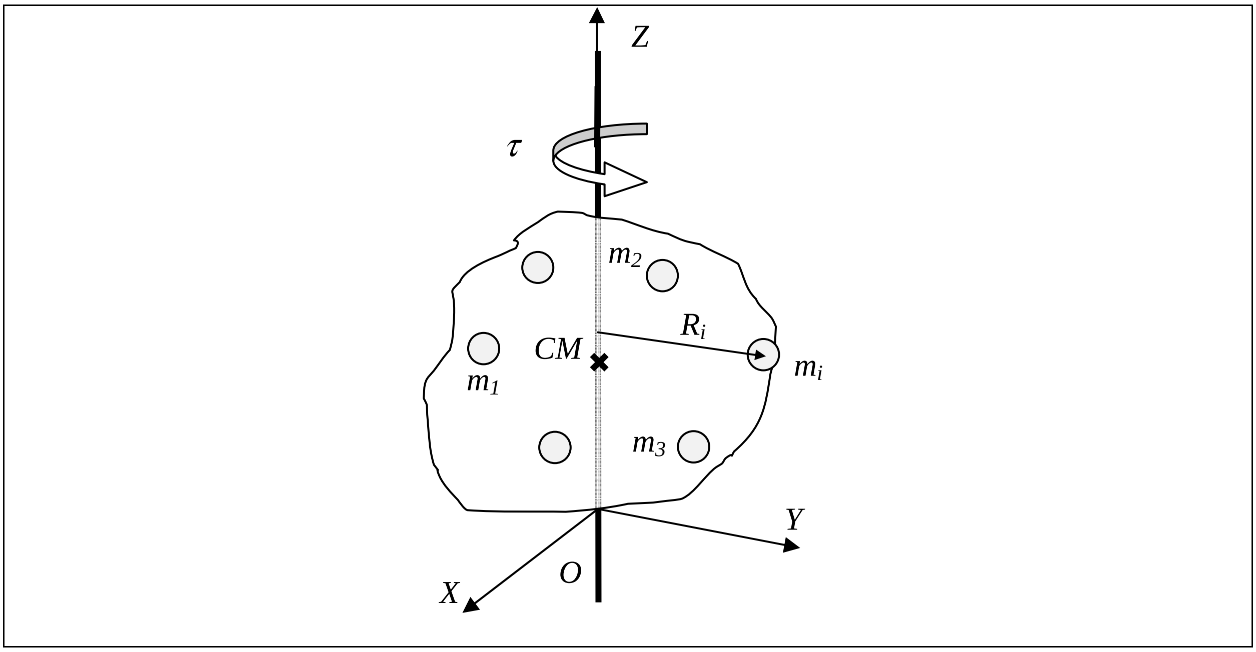
Como la fuerza aplicada en todo momento permanece perpendicular a la distancia *R*, la expresión queda:

$$|\vec{\tau}| = R.F$$

Utilizando la segunda ley de Newton se puede escribir operando algebraicamente y agrupando términos:

$$\tau = R \cdot m \cdot a$$
$$\tau = R \cdot m \cdot \alpha \cdot R$$
$$\tau = m \cdot R^2 \cdot \alpha$$
$$\tau = I_Z \cdot \alpha$$

Siendo I_Z el momento de inercia de la partícula respecto al eje de giro. Si ahora se extiende el análisis a todas las partículas de un cuerpo rígido manteniendo el mismo torque sobre el sistema según se muestra en la figura y, para este análisis, se hace coincidir el centro de masa del sistema con el eje *z* que en este caso coincide con el eje de giro.



Debido a este torque, el resto de las partículas se moverán arrastradas por fuerzas internas al sistema. Estas fuerzas aparecen de a pares, cumpliendo con la tercera ley de Newton por lo que se anulan los torques correspondientes respecto al eje tomado como referencia.
El torque neto se puede escribir como:

$$\tau = \sum R_i \cdot m_i \cdot a_i$$

$$\tau = \sum R_i \cdot m_i \cdot \alpha_i . R_i$$

Debido a que todas las partículas poseen la misma aceleración angular, se tiene:

$$\tau = \sum \left(m_i \cdot R_i^{\ 2} \right) \cdot \alpha$$

Finalmente el momento de inercia del cuerpo rígido dependerá de la forma geométrica del mismo, quedando:

$$\tau = I_0 \cdot \alpha$$

Finalmente el torque exterior aplicado al cuerpo rígido imprime a un cuerpo de momento de inercia baricéntrico I_0 una aceleración angular α.
En forma vectorial, la expresión anterior se escribe como:

$$\vec{\tau} = I_0 \cdot \vec{\alpha}$$

Siendo el vector torque colineal con el vector aceleración angular ya que el momento de inercia es una magnitud escalar, siendo su unidad en el Sistema Internacional *kg.m*^{2}.
Para el caso de que el eje de giro no pase por el centro de masa del cuerpo rígido, al momento de inercia se le debe aplicar el Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner.

ENERGÍA CINÉTICA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN RESPECTO AL EJE BARICÉNTRICO

Si el mismo cuerpo rígido representado en la figura anterior se encuentra girando respecto a un eje fijo que pase por su centro de masa, la energía cinética de cada una de las partículas que lo componen está dada por la expresión:

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot V_i^2$$

Operando algebraicamente queda:

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot d_i^2$$

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot d_i^2 \cdot \omega^2$$

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot \left(m_i \cdot d_i^2\right) \cdot \omega^2$$

La energía cinética total de las *n* partículas que componen el cuerpo rígido será la suma de cada una de las energías cinéticas quedando:

$$K = \sum K_i$$

$$K = \sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot d_i^2 \cdot \omega^2$$

Como la velocidad angular es común a todas las partículas del cuerpo rígido se puede escribir:

$$K = \left(\sum \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot d_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

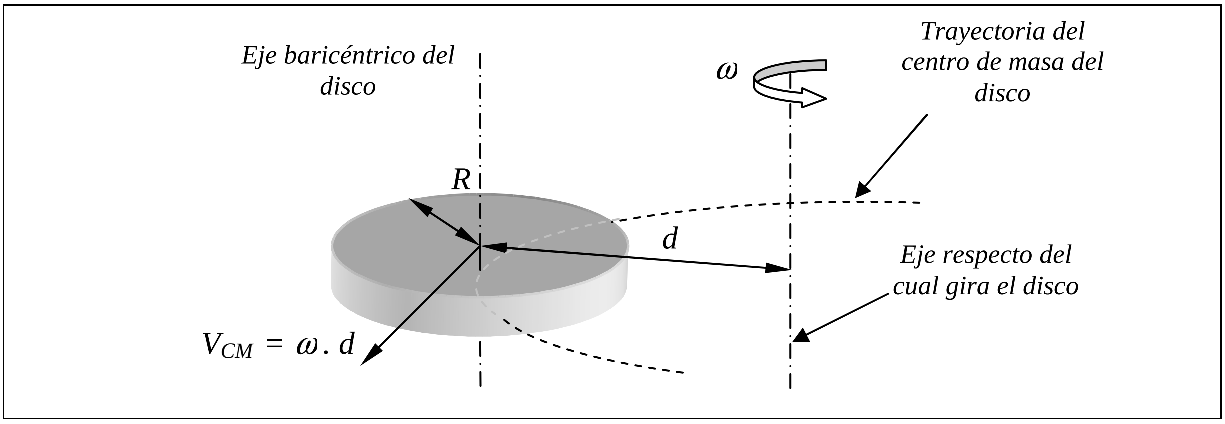
$$K = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum m_i \cdot d_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2$$

El momento de inercia I_0 en este caso corresponde al eje que pasa por el centro de masas o eje baricéntrico del cuerpo.

ENERGÍA CINÉTICA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN RESPECTO A UN EJE PARALELO AL BARICÉNTRICO

Para determinar la energía cinética de rotación que posee un cuerpo disco respecto a un eje que no pasa por el mismo se utilizará el sistema mostrado en el siguiente esquema:



Aquí se muestra un cuerpo rígido en forma de disco de masa *m* y radio *R* girando respecto a un eje que se encuentra a una distancia *d* del eje de giro.
El desarrollo se puede encarar utilizando el Teorema de Steiner.
La energía cinética del disco respecto al eje sobre el cual gira está dada por:

$$K = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega^2$$

Siendo I_1 el momento de inercia del disco respecto al eje de giro. Aplicando el teorema de ejes paralelos la inercia I_1 se puede escribir como:

$$I_1 = I_0 + M \cdot d^2$$

Siendo *M* la masa total del disco.
Reemplazando esta cantidad en la expresión de la energía cinética del sistema, de tendrá:

$$K = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega^2$$
$$K = \frac{1}{2} \cdot \left(I_0 + M \cdot d^2\right) \cdot \omega^2$$
$$K = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot \omega^2 \cdot d^2$$

Por lo tanto la energía cinética que poseerá será la suma de dos energías. El primer sumando corresponde a la energía cinética de rotación respecto al eje baricéntrico.
La velocidad del centro de masa se puede expresar en función de la velocidad angular como:

$$V_{CM} = \omega \cdot d$$

Reemplazando esta última en la expresión de la energía cinética queda:

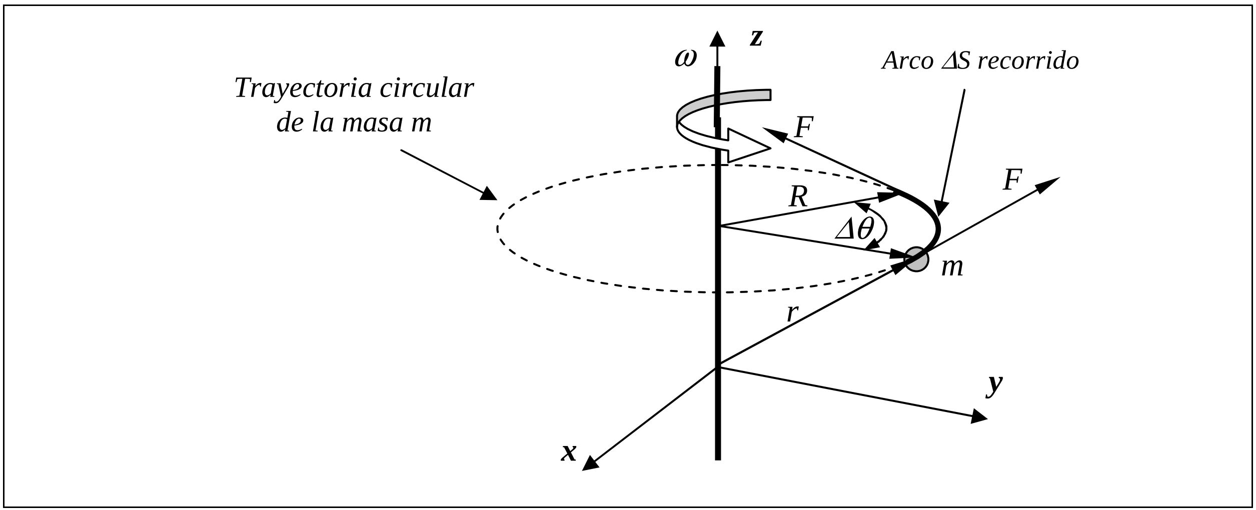
$$K = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot V_{CM}^2$$

Si se observa detenidamente se puede distinguir la suma de dos energías cinéticas, la energía cinética de rotación respecto a su eje baricéntrico (primer sumando) con una velocidad angular ω y la energía cinética de traslación del centro de masa (segundo sumando) moviéndose a la velocidad V_{CM} .

$$K = Krot + Ktrasl$$

TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Dada una partícula de masa *m* que puede girar respecto a un eje fijo a una distancia *R* del mismo y se le aplica una fuerza *F* de módulo constante y en forma tangencial según se muestra en el esquema:



El trabajo realizado sobre la partícula estará dado por la expresión:

$$\Delta W_m = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$$

Como la fuerza aplicada es colineal con el desplazamiento, el trabajo como producto escalar de ambos vectores coincide con el producto de sus módulos debido a que el ángulo vale cero, quedando:

$$\Delta W_m = F \cdot \Delta S$$
$$\Delta W_m = F \cdot \Delta\theta \cdot R$$
$$\Delta W_m = \tau \cdot \Delta\theta$$

Para determinar la potencia media utilizada sobre una partícula se recurre a la definición llegando a la expresión:

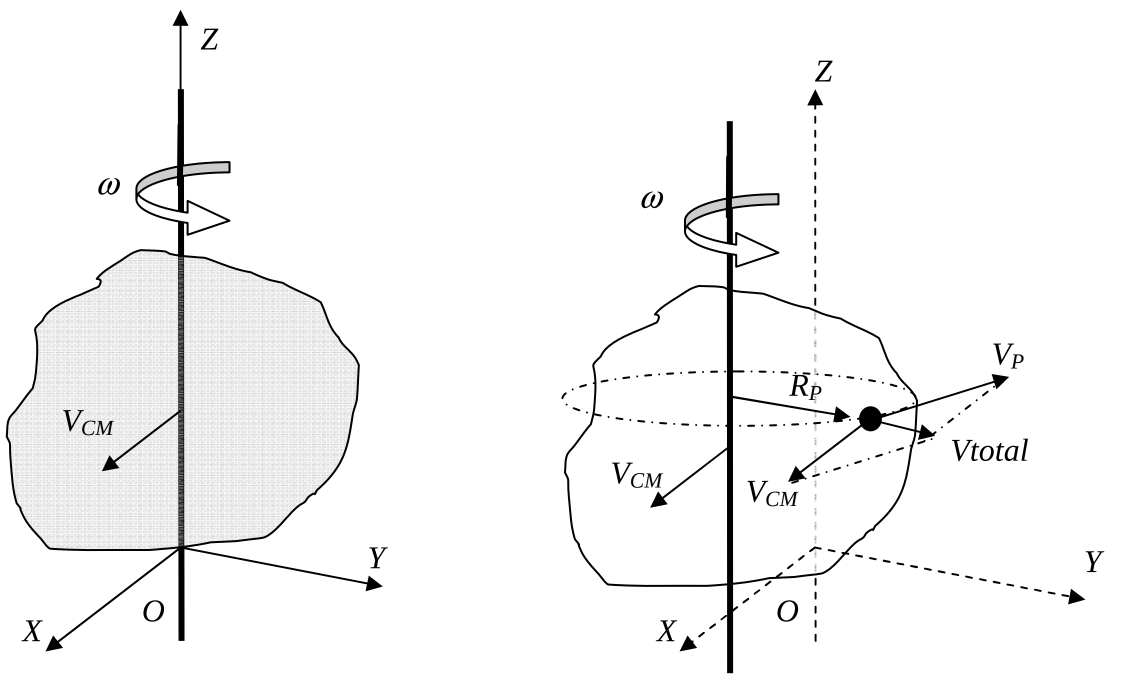
$$Pmed = \frac{\Delta W_m}{\Delta t}$$
$$Pmed = \frac{\tau \cdot \Delta\theta}{\Delta t}$$
$$Pmed = \tau \cdot \omega_{med}$$

La potencia instantánea será:

$$P = \frac{dW_m}{dt}$$
$$P = \frac{\tau \cdot d\theta}{dt}$$
$$P = \tau \cdot \omega$$

ROTOTRASLACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS

Dado el cuerpo de la figura donde se tiene simultáneamente movimientos de traslación del centro de masa y rotación del cuerpo respecto de un eje que pasa por el centro de masa. Este eje se traslada en forma paralela a sí mismo.



Cuerpo rígido girando en sentido positivo respecto del eje Z y trasladándose con velocidad V_{CM}.

La velocidad total de una partícula P debido a la superposición de las dos velocidades lineales: la velocidad del centro de masa V_{CM} y la debida a la rotación V_P.

Si se analiza cinemáticamente la partícula indicada, esta tendrá debido al movimiento de traslación una velocidad igual a la del centro de masa. Debido a la rotación respecto al eje sobre el cual gira (que se traslada en forma paralela al eje *z*) una velocidad tangencial dada por:

$$\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{R}_P$$

Como estos vectores permanecen perpendiculares entre si, se puede utilizar los módulos quedando:

$$V_P = \omega \cdot R_p$$

Finalmente la velocidad total de la partícula de este cuerpo rígido queda:

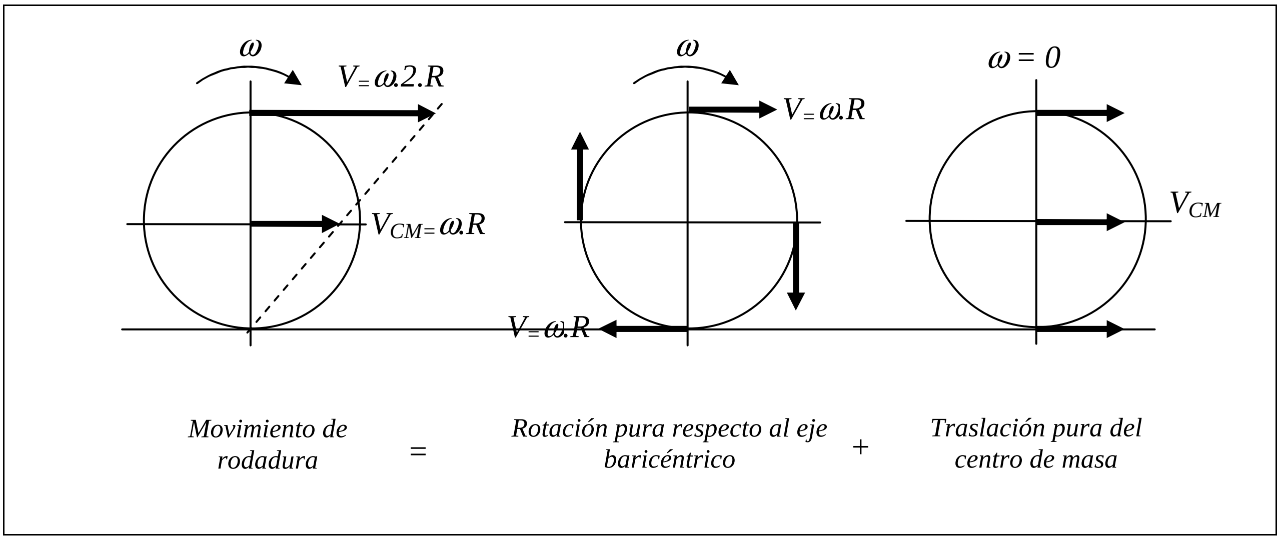
$$\vec{V}_{total} = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_p$$

La energía total del cuerpo rígido queda, según se vio, con la expresión:

$$K = Krot + Ktrasl$$

RODADURA DE CUERPOS RÍGIDOS

Se define así al cuerpo cuyo punto de contacto con la superficie sobre la cual se apoya no se desliza, es decir no existe velocidad relativa entre el punto de contacto del cuerpo y el apoyo sobre la superficie de apoyo. Para el caso de un cuerpo rígido que ruede sin deslizar sobre una superficie plana horizontal, como el caso de un disco de masa *M* y radio *R*, la expresión del momento angular para la rodadura será.



Para este caso particular de movimiento se tiene que la velocidad del centro de masa cumple con la condición dada por el producto vectorial siguiente:

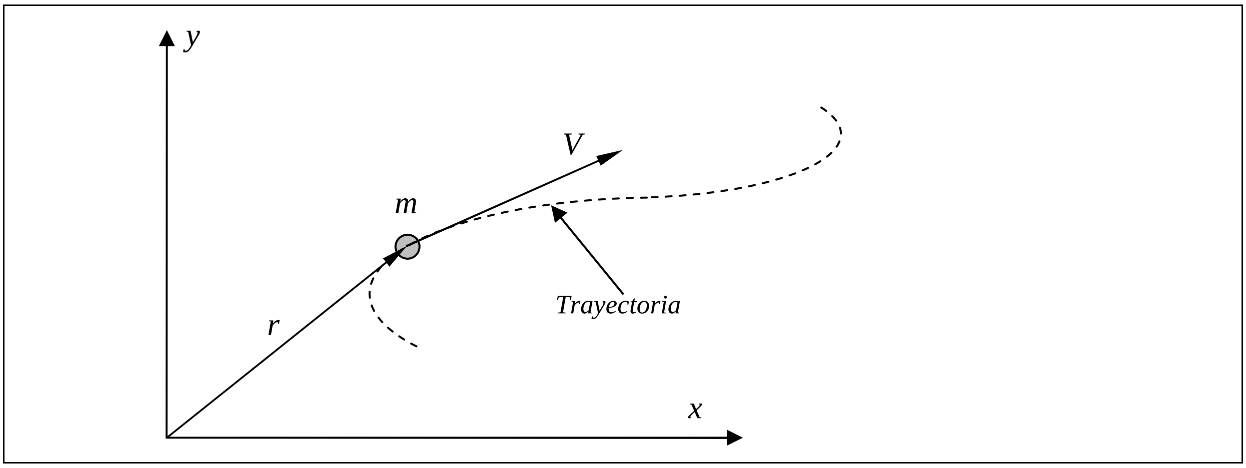
$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Esto se debe a que el punto de apoyo del cuerpo rígido no experimenta deslizamiento debido a que se encuentra rodando, por lo tanto, se puede considerar para ese instante que el punto de contacto es un centro instantáneo de rotación.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Así como se definió la cantidad de momento lineal o cantidad de movimiento, se define la cantidad de momento angular para una partícula de masa *m* y que posee una velocidad instantánea *V* respecto a un punto fijo dado por su vector posición *r*, como el momento de la cantidad de movimiento y expresado por el vector *L*, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



De aquí se desprende que, el momento angular *L* depende del punto de referencia adoptado, ya que si este se encuentra en la dirección del vector cantidad de movimiento, el resultado del producto vectorial será nulo pues el ángulo formado por ambos vectores es 0º (o 180º).

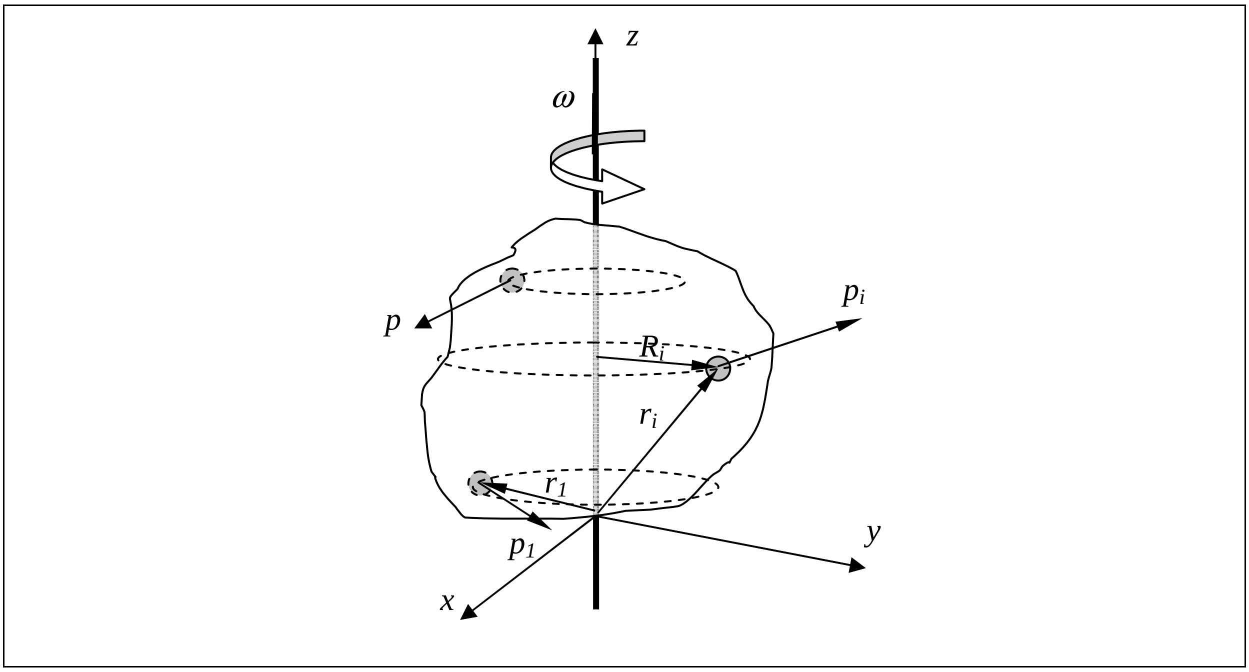
CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La expresión del momento angular de un sistema de partículas estará dada por la suma vectorial del momento angular de cada una de ellas, cuya expresión será:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO GIRANDO SOBRE UN EJE FIJO

Dado un cuerpo rígido en un movimiento de rotación, la cantidad de momento angular del mismo, estará dado por la sumatoria de las cantidades de momento angular de cada una de las partículas que lo componen. Si se esquematiza se tendrá:



Si se realiza la suma vectorial, se tendrá:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Operando algebraicamente:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(m_i \cdot \vec{V}_i\right)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i . (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Si se realizan los productos vectoriales de cada partícula del cuerpo rígido, queda:

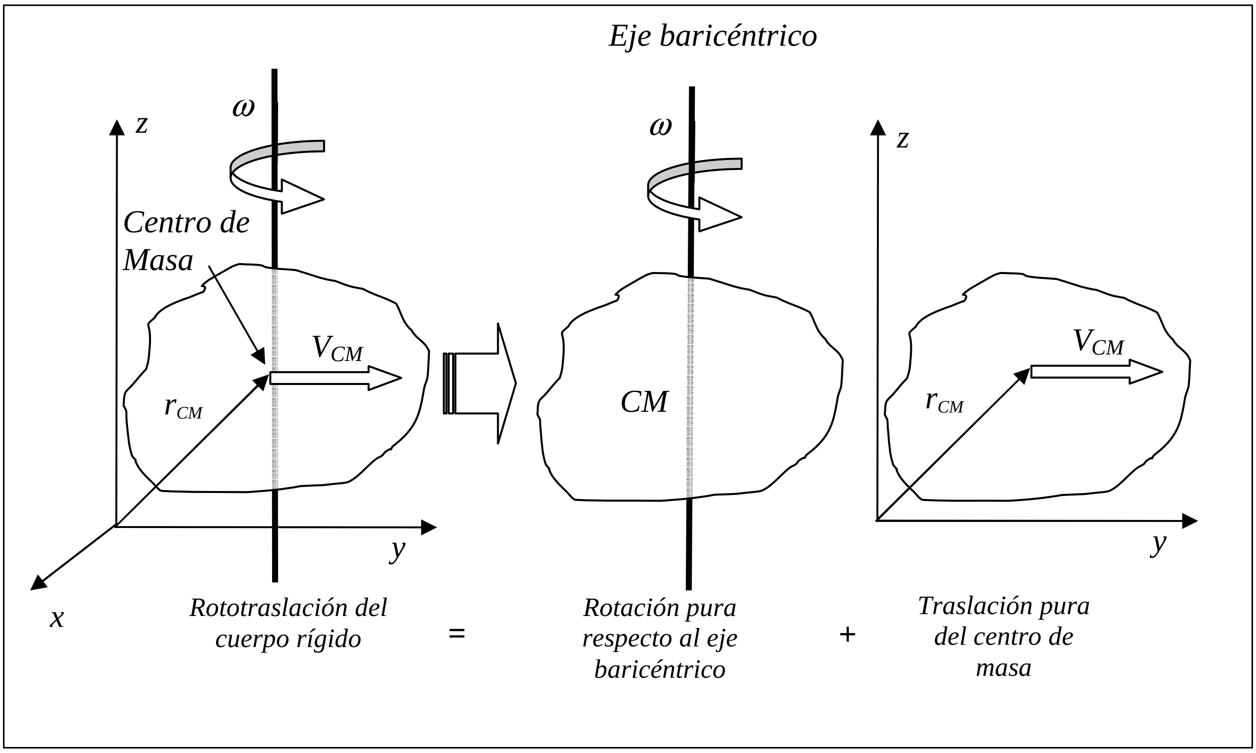
$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i . R_i^{\ 2} \right) . \vec{\omega}$$

Finalmente la expresión entre paréntesis corresponde al momento de inercia del cuerpo rígido respecto al eje que pasa por el punto de referencia del momento angular, que en este caso, corresponde al origen de coordenadas. Finalmente queda:

$$\vec{L} = I \, . \, \vec{\omega}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN ROTOTRASLACIÓN

Dado un cuerpo rígido en movimiento plano que posee simultáneamente una velocidad de traslación dada por el vector V_{CM}, correspondiente a la velocidad de su centro de masa y de una rotación sobre un eje que pasa por ese mismo centro de masa cuya velocidad angular es ω, el momento angular del cuerpo rígido, respecto al origen de coordenadas indicado se puede considerar separado en dos cantidades, un momento angular correspondiente a la traslación y otro momento angular correspondiente a la rotación según se esquematiza a continuación:



El momento angular total estará dado por la expresión vectorial:

$$\vec{L} = \left(\vec{L}_{ROTACION}\right) + \left(\vec{L}_{TRASLACION}\right) = \left(I_o.\vec{\omega}\right) + \left(r_{CM} \times M.\vec{V}_{CM}\right)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Sabiendo que el momento angular de una partícula está dado por:

$$\vec{L}_i = r_i \times m_i.\vec{V}_i$$

Derivando la expresión anterior, queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_i\right) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i.\vec{V}_i + \vec{r}_i \times m_i.\frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

Como el primer término posee dos vectores colineales, su producto vectorial es nulo, quedando:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_i\right) = \vec{r}_i \times m_i.\frac{d\vec{V}_i}{dt}$$

Este término corresponde al momento neto sobre la partícula, quedando:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_i\right) = \vec{\tau}$$

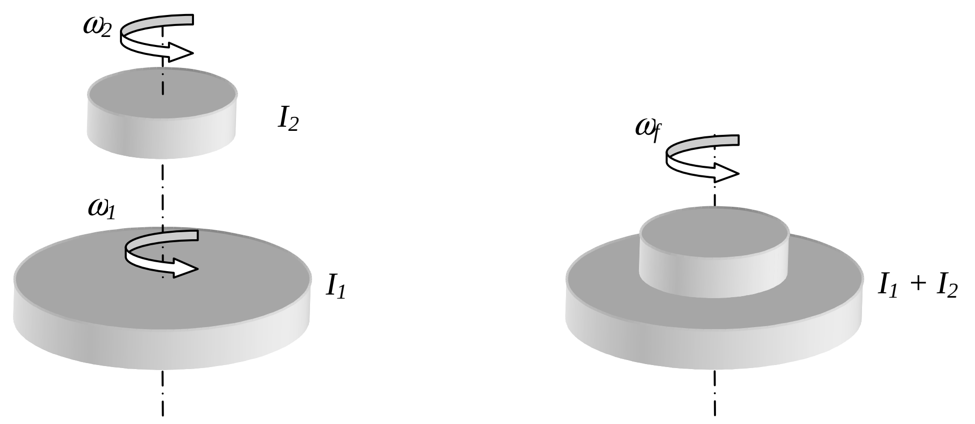
Para el caso de cuerpos rígidos, la expresión es exactamente la misma:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}\right)=\vec{\tau}$$

Si el torque neto es cero significa que el momento angular total debe ser constante o lo que es lo mismo la variación es nula, por lo que se puede escribir:

$$\Delta\vec{L}=0$$
$$\vec{L}_{inicial}=\vec{L}_{final}$$

Por ejemplo, si el sistema a analizar corresponde a dos discos montados sobre un mismo eje sin rozamiento y cuyo momento exterior es nulo. Uno de ellos, cuyo momento de inercia baricéntrico es I_1 se encuentra girando respecto a ese eje baricéntrico a velocidad constante ω_1 y el otro disco de momento de inercia I_2 girando a velocidad constante ω_2 según se indica en la figura en la situación inicial.



Situación inicial *Situación final*

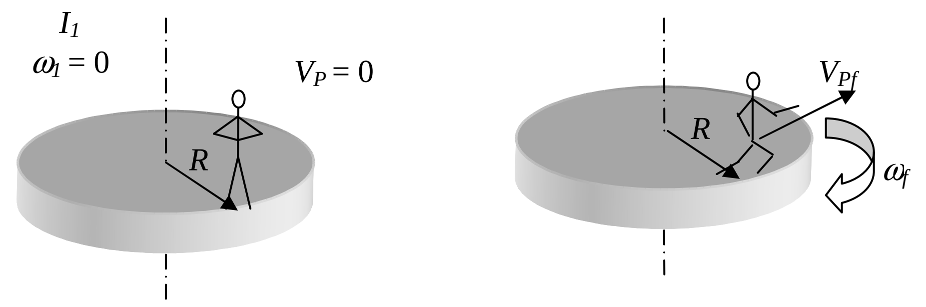
Como no existe momento exterior que actúe sobre los discos en ningún momento del proceso de acople, se debe cumplir que las cantidades de momento angular antes y después de que los discos permanece constante, por lo tanto se puede expresar.

$$\left(\vec{L}\right)_{inicial}=\left(\vec{L}\right)_{final}$$
$$\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)_{inicial}=\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)_{final}$$
$$\left(I_1\cdot\vec{\omega}_1+I_2\cdot\vec{\omega}_2\right)_{inicial}=\left(I_1\cdot\vec{\omega}_1+I_2\cdot\vec{\omega}_2\right)_{final}$$
$$I_1\cdot\vec{\omega}_1+I_2\cdot\vec{\omega}_2=\left(I_1+I_2\right)\cdot\vec{\omega}_f$$

De esta expresión vectorial resultante se desprenden algunas cuestiones importantes a saber:

- ✓ Si las velocidades angulares poseen sentidos diferentes, los vectores cantidad de momento angular también lo serán y corresponderá realizar una resta de escalares debido a que ambos poseen igual dirección (el mismo eje) pero sentidos diferentes y cuyo signo dependerá del sistema de referencia adoptado.
- ✓ Si ambos cuerpos poseen iguales momentos de inercia e idénticos módulos de velocidad angular pero de distinto sentido, la velocidad angular final de ambos discos acoplados será nula.

Se considera el caso de una persona parada en la periferia de un disco estando ambos en reposo según se representa en la situación inicial mostrada en la figura.



Situación inicial *Situación final*

Si se considera a la persona como una masa puntual y esta finalmente se mueve con velocidad constante *Vf*, por la periferia del disco, y no existen momentos exteriores que modifiquen la situación de cada uno de los cuerpos, se puede expresar:

$$\left(\vec{L}\right)_{inicial} = \left(\vec{L}\right)_{final}$$

$$\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_P\right)_{inicial} = \left(\vec{L}_1 + \vec{L}_P\right)_{final}$$

$$0 = I_1 \cdot \vec{\omega}_f + R \times Mp \cdot V_{Pf}$$

$$0 = I_1 \cdot \vec{\omega}_f + \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Rx & Ry & 0 \\ Mp \cdot V_{PfX} & Mp \cdot V_{PfY} & 0 \end{pmatrix}$$

Si se ubican los ejes coordenados haciendo coincidir el de absisas con el vector R y el de ordenadas con el vector V_{Pf} , la expresión quedará:

$$0 = I_1 \cdot \vec{\omega}_f + \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R & 0 & 0 \\ 0 & Mp \cdot V_{PfY} & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = -I_1 \cdot \omega_f \cdot \hat{k} + R \cdot Mp \cdot V_{PfY} \cdot \hat{k}$$

De aquí se deduce que si la velocidad de la persona posee una dirección dada, la plataforma deberá girar "para el otro lado" a fin de mantener la misma cantidad de momento angular inicial nulo.
Si se desea determinar la velocidad angular de la plataforma, quedará:

$$\omega_f = \frac{R \cdot Mp \cdot V_{PfY}}{I_1}$$

ANEXO I

SISTEMA DE UNIDADES

A continuación se muestran las unidades de las magnitudes físicas más usadas en el Sistema Internacional y en el Sistema Técnico.

		Sistema Internacional	Sistema Terrestre o Técnico
Magnitudes Fundamentales	Longitud	m	m
	Masa	kg	---
	Tiempo	s	s
	Fuerza	---	kgf

Magnitudes Derivadas	Masa	(magnitud fundamental)	UTM (Unidad Técnica de Masa)
	Velocidad	m/s	m/s
	Aceleración	m/s^2	m/s^2
	Fuerza	Newton	(magnitud fundamental)
	Densidad	kg/m^3	UTM/ m^3
	Trabajo	Joule	kgm
	Potencia	Watts	kgm/s
	Presión	Pascal	kgf/m^2

Magnitud	Definición	Expresión	Sistema Internacional	Sistema Técnico
Densidad	Es la masa de un cuerpo por unidad de volumen	$\rho = \frac{M}{V}$	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{UTM}{m^3}$
Presión	Es la fuerza ejercida por unidad de superficie	$p = \frac{F}{S}$	$\frac{N}{m^2} = P \quad (Pascal)$	$\frac{kgf}{m^2}$
Trabajo	Es la fuerza ejercida por la distancia recorrida	$T = F.d$	$N.m = J \quad (Joule)$	$kgf.m$
Potencia	Trabajo realizado en la unidad de tiempo	$P = \frac{T}{t}$	$\frac{J}{s} = W \quad (Watts)$	$\frac{kgf.m}{s}$
Período	Tiempo que tarde en realizarse una oscilación	T	s	s
Frecuencia	Cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo	$\frac{1}{T}$	$\frac{1}{s} = Hz \quad (Hertz)$	$\frac{1}{s} = Hz \quad (Hertz)$

ANEXO II

Para obtener la ecuación de la velocidad en función de la aceleración y el espacio recorrido utilizando las herramientas de cálculo se tendrá:

$$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$$
$$a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$a = \frac{dv}{dx} \cdot v$$
$$a \cdot dx = v \cdot dv$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación diferencial para los instantes inicial y final, se tendrá:

$$\int_{x=0}^{x=xf} a \cdot dx = \int_{v=0}^{v=vf} v \cdot dv$$
$$a \cdot (x_f - x_o) = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_0^2)$$
$$2 \cdot a \cdot \Delta x = v_f^2 - v_0^2$$

Esta última expresión puede particularizarse cuando en el instante inicial la velocidad es nula, quedando:

$$2 \cdot a \cdot \Delta x = v_f^2$$
$$v_f = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta x}$$

Aquí la velocidad final de un móvil que parte del reposo dependerá de la aceleración a y del espacio recorrido en ese intervalo de tiempo.