UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

MATEMÁTICA

Parte 2

Víctor Wall

Editorial Universitaria de Misiones
2008

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870
Posadas - Misiones – Tel-Fax: *(03752)* 428601
Correos electrónicos:
edunam-admini@arnet.com.ar
edunam-direccion@arnet.com.ar
edunam-produccion@arnet.com.ar
edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra
Coordinación de la edición: Claudio O. Zalazar
Tapa: Francisco Sánchez
Compaginación: Amelia E. Morgenstern
Corrección: Sebastián Franco
Impreso en Argentina

ISBN-10: 950-579-060-0
ISBN-13: 978-950-579-060-9
© Editorial Universitaria
Universidad Nacional de Misiones
Posadas, 2007

Wall, Víctor
Matemática: cuaderno 2/coordinado por Claudio Oscar Zalazar- 1a ed. - Posadas: EDUNaM - Editorial Universitaria de la Univ. Nacional de Misiones, 2007.
84 p.; 30x21 cm. ISBN 950-579-060-0 Función Real. 2. Continuidad. 3. Derivadas. I. Zalazar, Claudio Oscar, coord. II. Título
ISBN-10: 950-579-060-0
CDD 515

Fecha de catalogación: 11/12/2006.

ÍNDICE

Introducción 5
Límite de funciones reales de variable real. 7
Sucesiones de Números reales. 7
Límite de una sucesión. 9
Operaciones sobre los límites de sucesiones. 13
Límite de una función real de variable real. 15
Límites laterales. 18
Límite infinito. 19
Límite en el infinito. 21
Propiedades del límite de una función. 21
Continuidad de una función. 23
Continuidad lateral. 24
El Álgebra de las funciones continuas. 25
Teoremas de la conservación. 25
Discontinuidades. 26
Discontinuidad evitable. 27
Discontinuidad de salto. 27
Discontinuidad de tendencia al infinito. 28
Cálculo de límites. 29
Infinitésimos. 30
Infinitésimos equivalentes. 31
Test. 32
Guía de Trabajos Prácticos. 34
Derivadas. 36
Recta tangente a la gráfica de una función real. 37
Pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. 38
Derivadas. 39
Definición de la derivada. 41
Derivada a la derecha, derivada a la izquierda. 41
Interpretación geométrica. 42
Función diferenciable en un punto. 44
Relaciones entre diferenciabilidad y derivabilidad. 45
Diferenciabilidad y continuidad. 46
Diferencial de una función. 47
Interpretación geométrica. 48
Cálculo de derivadas. 49
Crecimiento y decrecimiento. 53
Máximo local y Mínimo local. 56
Derivadas de las funciones elementales y circulares. 57
Test. 59
Guía de Trabajos Prácticos. 61
Aplicaciones de la derivada. 63
Teorema de Rolle y de los incrementos finitos 65
Aplicación de la derivada al cálculo de límites. 69
Asíntotas. 70
Convexidad y Concavidad de una función. 72

Derivadas sucesivas y teoría del valor medio generalizado. 74
Aproximación local de una función en un punto..75
Fórmulas de Taylor y de Mac-Laurin. 76
Máximos y mínimos locales de funciones varias veces derivables. 79
Test...80
Guía de Trabajos Prácticos. 82

Introducción

En esta segunda parte se desarrollan los temas que completan el programa oficial y que se dictan en el Primer cuatrimestre de las Asignaturas: Matemática I para las carreras de Farmacia y Bioquímica, y la Primera y Segunda Parte de la Asignatura Matemática/92, (cuyo dictado es anual) para las carreras Licenciatura en Genética y Profesorado en Biología, para el cual se tiene previsto elaborar el Cuaderno 3.

Siguiendo con el criterio en la elaboración del Cuaderno 1, es este un complemento de las clases dadas, servirá al alumno como guía de estudio de los Programas de las Asignaturas mencionadas, y bajo ningún punto de vista sustituye a la extensa bibliografía existente referida a los temas tratados aquí.

Solamente se pretende unificar la notación y ordenar los contenidos mínimos exigidos por las Carreras para las cuales se dicta.

Este trabajo surgió luego de estar a cargo de las Asignaturas nombradas hace más de 14 años. El mismo fue redactado a partir de las clases dadas durante estos años y es un trabajo que se presentó al alumno como guía de estudio, a través de fotocopias, durante estos últimos años y que fue continuamente reformulado hasta llegar a esta versión, que esperamos brinde un mejor servicio a las actividades del alumno en su proceso de aprendizaje.

Cuestionario

El siguiente cuestionario deberá servir como un repaso de los conceptos ya estudiados, necesarios para el desarrollo del presente tema.

1) Recuerde la definición de valor absoluto y, en particular cómo resuelve una desigualdad del tipo $|x - x_0| < \delta$.

2) Repase el concepto de distancia en **R** y sus propiedades.

3) ¿Qué entiende por entorno de un punto $x_0 \in \mathbf{R}$?; y ¿por entorno perforado?

4) ¿A qué llama punto de adherencia?

5) Repase el concepto de función real de variable real.

6) ¿Cuáles son los tres elementos esenciales en la definición del concepto de función?

7) ¿Qué entiende por gráfica de una función?

Límite de funciones reales de variable real

1. Sucesiones de números reales

Introducción

Estudiaremos ahora los límites de sucesiones de números reales, y más adelante trataremos el límite de funciones reales de variable real.

Todos los conceptos y resultados importantes del Análisis Matemático se refieren en forma explícita o indirectamente a límites. Por lo que resulta que esta noción desempeña un papel central en el estudio.

Los límites de sucesiones de números reales son los más simples; por eso es conveniente empezar por su estudio. Otros tipos de límites más sofisticados, como derivadas, integrales, sucesión de funciones, etc. se deberían estudiar a continuación.

El primer paso para estudiar estos conceptos es el definir en forma formal qué se entiende por sucesión de números reales, para luego estudiar los conceptos de naturaleza algebraica y de otro tipo relacionados con esta definición.

En nuestro curso solamente abordaremos el concepto de límite de sucesiones con el objeto didáctico de comprender con el mayor fundamento posible el de límite de funciones reales. A pesar de lo expresado, se ha extendido su formulación con el fín de mostrar un estudio lo más estricto posible del tema para un curso de este nivel.

1.1. Sucesiones de números reales

1.1.1. Definición

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de **N** en **R**. Es decir, si denotamos con x a esta aplicación, será:

$$\left(\begin{array}{rcl} x:\mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ n & \mapsto & x_n = x_{(n)} \end{array}\right)$$

El valor $x_{(n)}$, para todo $n \in \mathbf{N}$, será representado por x_n y llamado el término de orden n de la sucesión o, n-ésimo término de la sucesión.
El conjunto de las imágenes de la sucesión será entonces $\{x_0; x_1; x_2; \cdots ; x_n; \cdots \}$ y le escribiremos sencillamente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, para indicar la sucesión x.

No se debe confundir entonces a la sucesión x, con el conjunto $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de sus términos. A este conjunto, simplificando la notación, le llamaremos:

$$(x_n) = \{x_0; x_1; x_2; \cdots ; x_n; \cdots\}.$$

La función $x: \mathbf{N} \mapsto \mathbf{R}$ no es necesariamente inyectiva, podemos tener $x_m = x_n$ con $m \neq n$. En particular, (a pesar de la notación) el conjunto (x_n) puede ser finito, incluso reducirse a un único elemento, como en el caso de una sucesión constante, en el que $x_n = a \in \mathbf{R}$, para todo número natural n.

Cuando una sucesión es inyectiva, es decir $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, decimos que es una sucesión de términos dos a dos distintos.

Se dice que una sucesión (x_n) está acotada cuando el conjunto imagen esté acotado, es decir cuando existen números reales a, b tales que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Esto quiere decir además que todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo [a, b].

Todo intervalo [a, b] está incluído en un intervalo de la forma [-c, c], con $c > 0$ (intervalo simétrico). Para observar esta situación, basta con elegir $c = \text{máx}\{|a|; |b|\}$.

Como la condición $x_n \in [-c, c]$ es equivalente a $| x_n | \leq c$, vemos que una sucesión es acotada sí y solo sí existe un número real $c > 0$, con tal de que $| x_n | \leq c$, para todo $n \in \mathbf{N}$. De lo que se desprende que (x_n) está acotada sí y solo sí $(| x_n |)$ está acotada.

Una sucesión (x_n) se dice acotada superiormente cuando existe un número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Esto significa que todos los términos de (x_n) pertenecen a la semirecta $]-\infty, b]$.

Análogamente decimos que (x_n) está acotada inferiormente cuando existe $a \in \mathbf{R}$ tal que $a \leq x_n$, es decir, $x_n \in [a, +\infty[$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

1.1.2. Sucesiones monótonas

Definiciones

1.- Una sucesión (x_n) de números reales se dice ***creciente*** si

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad x_n \leq x_{n+1}$$

2.- Se dice ***estrictamente creciente*** si

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad x_n < x_{n+1}$$

3.- Se dice ***decreciente*** si

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad x_n \geq x_{n+1}$$

4.- Se dice ***estrictamente decreciente*** si

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad x_n > x_{n+1}$$

Ejemplos de sucesiones

Ejemplo 1. $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Es una sucesión constante: $\{1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$, está evidentemente acotado, pues el conjunto imagen $x(\mathbf{N}) = \{1\}$, no es decreciente ni creciente.

Ejemplo 2. $x_n = n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. En este caso tendremos que la aplicación x : N . R genera la sucesión $(0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ que está acotada inferiormente, no tiene cota superior y es monótona creciente.

Ejemplo 3. $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y n par y $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y n impar. La sucesión definida será: $(0, 1, 0, \cdots)$. El conjunto imagen de la sucesión es $(\mathbf{N}) = \{0, 1\}$. Es acotada y no es monótona.

Ejemplo 4. $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}^*$. Tendremos la sucesión: $\left(\dfrac{1}{1};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3};\ \cdots;\ \dfrac{1}{n};\ \cdots\right)$; monótona decreciente y acotada.

Ejemplo 5.- $x_n = \dfrac{\left[1 + (-1)^{n+1}\right] \cdot n}{2}$. Tendremos que $x_n = n$, para n impar y $x_n = 0$ para n par. La sucesión tomará la forma $(0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, \cdots)$. Está acotada inferiormente, no está acotada superiormente y no es monótona. Los términos de orden impar constituyen una sub-sucesión monótona creciente, no acotada, $x_{2n-1} = 2n - 1$, en cuanto a los términos de orden par constituyen una subsucesión constante $x_{2n} = 0$.

1.2. Límite de una sucesión

Introducción

Intuitivamente, decir que el número real l es el límite de la sucesión (x_n) significa afirmar que, para valores lo suficientemente grandes de n, los términos x_n, se encontrarán tan próximos a l como se desee.

Con un poco más de precisión podemos decir: Eligiéndose un “error” por medio de un número real $\varepsilon > 0$, existirá un número natural p, tal que todos los términos x_n de la sucesión que tienen como subíndice $n > p$ son valores aproximados a l con un error inferior a ε.

El número natural p, evidentemente debe depender de ε, y es de esperar que, para valores menores de ε, se necesitará elegir o tomar p, cada vez mayor.

Definición

Se dice que una sucesión **(x_n)** ***converge hacia*** ***l*****,** ***o que tiene el límite*** ***l*****,** ***si para todo entorno*** **U** ***de l*** **(de radio ε),** ***existe un número natural p tal que*****:**

$$\mathbf{n > p \;\Rightarrow\; x_n \;\varepsilon\; U_{\mathit{l}}\,.}$$

Sobre la recta real se puede, entonces tomar como entorno **U** ***de l un intervalo abierto centrado en l y de radio*** **ε,** ***de manera que si*** **2ε** ***designa la longitud del intervalo*** **U,** ***se tiene*****:**

$$\mathbf{x \in U_{\mathit{l}} \;\;\Rightarrow\;\; |x - \mathit{l}\,| < \varepsilon}$$

Con tales entornos, se obtiene una definición equivalente de convergencia:

Se dice que el número real **l = lím x_n,** (o que (x_n) converge hacia l), ***donde*** $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ***cuando para cada número real*** **ε > 0** ***dado arbitrariamente, es posible encontrar un entero*** **p ∈ N** ***tal que*** **| x_n - l | < ε** ***siempre que*** **n > p** ***es decir,***

$$\mathbf{n > p \;\Rightarrow\; |x_n - \mathit{l}\,| < \varepsilon.}$$

Simbólicamente podemos escribir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = l \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\;\; \exists\, p \in \mathbf{N},\;\; n > p \;\;\Rightarrow\;\; |x_n - l\,| < \varepsilon}$$

<u>OBSERVACIÓN</u>

Si lím $x_n = l$ entonces cualquier intervalo $]l - \varepsilon;\, l + \varepsilon\,[$, de centro l y radio $\varepsilon > 0$, contiene a todos los términos x_n de la sucesión, con excepción de un número finito de términos con subíndice un número natural. En efecto, dado el intervalo $]l - \varepsilon;\, l + \varepsilon\,[$, con lím $x_n = l$ obtenemos $p \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > p \quad\Rightarrow\quad |x_n - l\,| < \varepsilon,$$

o sea

$$n > p \quad\Rightarrow\quad x_n \in\,]l - \varepsilon;\, l + \varepsilon\,[.$$

Asimismo. fuera del intervalo $]\, l - \varepsilon;\;\; l + \varepsilon\,[$, solo podrán estar un número máximo de términos x_1, x_2, ⋯ , x_p.

l - ε $\qquad$ l $\qquad$ l + ε

$\cdot x_1 \qquad \cdot x_2 \qquad] \qquad \cdot x_n \;\; \cdot \qquad [\qquad \cdot x_p$

Recíprocamente:

Si cualquier intervalo de centro l contiene a todos los x_n salvo un número finito de términos con subíndice un número natural, entonces lím x_n = l. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, el intervalo $]\, l - \varepsilon;\, l + \varepsilon\,[$ contendrá todos los x_n excepto para un número finito.

1.2.1. Unicidad del límite

Teorema 1

Si la sucesión (x_n) tiene límite l, este límite es único. es decir, si el $lim(x_n) = l$ y el $lim(x_n) = l'$ entonces $l = l'$.

Demostración 1:

Supondremos que los límites son distintos, esto es, $l \neq l'$ y tenemos que demostrar que esta suposición nos lleva a una contradicción. Existirán entonces dos entornos E_l y $E_{l'}$ de l y l' respectivamente, tales que $E_l \cup E_{l'} = \varnothing$.

Pero: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ implica la existencia de $p \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n > p \Rightarrow x_n \in E_l$$

Asimismo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l'$ entraña la existencia de $p' \in \mathbf{N}$ tal que:

$$n > p' \Rightarrow x_n \in E_{l'}$$

Se tendría entonces:

$$n > \text{máx}\{p, p'\} \Rightarrow x_n \in E_l \cup E_{l'} \text{ que,}$$

contradice la hipótesis inicial de que los entornos E_l, $E_{l'}$ no tenían elementos comunes.

Demostración 2:

Primero hacemos la siguiente observación. Sea $a \in \mathbf{R}$, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$|a| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

En efecto, supongamos $a \neq 0$. Como el intervalo abierto $]0, |a|[$ es distinto de vacio, ya que debe existir $\varepsilon \in]0, |a|[$. Se tiene entonces en ese caso $\varepsilon > 0$ con $|a| > \varepsilon$. (Contradicción).

Ahora, suponemos que la sucesión (x_n) tiene dos límites l y l'. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que,

$$|x_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |x_p - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aplicando la desigualdad triangular

$$|l - l'| < |l - x_p| + |x_p - l'| < \varepsilon$$

Y es así para todo $\varepsilon > 0$. Luego $\boldsymbol{l - l'} = 0$

El límite $\boldsymbol{l}$, si existe es único y se denota:

$$\lim_{x \to \infty} x_n = l$$

OBSERVACIÓN: Si una sucesión no converge, se dice que es ***divergente***. Una sucesión (x_n) es divergente si, para todo $l \in \mathbf{R}$, la sucesión (x_n) no converge a l, es decir tomando la contrarrecíproca de la definición precedente:

$$\forall l \in \mathbf{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \exists n \in \mathbf{N}, \ n > p \quad \text{tal que} \quad |x_n - l| > \varepsilon$$

Ejemplos:

a) .- $\forall\, x_0 \in \mathbf{R}$, (x_n) definida por $x_n = x_0\ \ \forall n$, converge a x_0.

b) .- La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a 0. En efecto, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$, $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Entonces, $\forall\ n \geq n_0 + 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{n} \in \left]-\frac{1}{n_0};\ \frac{1}{n_0}\right[\ \subset\ \left]-\varepsilon,\ \varepsilon\right[.$$

c).- La sucesión $(2 + (-1)^n)$ no converge a ningún punto de $\mathbf{R}$.
d).- La sucesión (n) no converge a ningún punto de $\mathbf{R}$.

Teorema 1.

Toda sucesión creciente y acotada superiormente (o bien decreciente y acotada inferiormente) admite límite.

Demostración.

Supongamos por ejemplo, la sucesión (x_n) creciente y acotada superiormente. Puesto que el conjunto de los x_n está acotado superiormente, admite un supremo l. (Recordar que si una parte A no vacía de $\mathbf{R}$ está acotada superiormente, el conjunto de las cotas superiores de A admite un elemento mínimo.): $l = \sup_{n \in \mathbf{N}} x_n$.

Por la propiedad del supremo, para todo número positivo ε, existe un número natural p tal que $l - x_p < \varepsilon$. Cómo la sucesión es creciente, se tiene además:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad l \geq x_n \geq x_p.$$

Por consiguiente, se tendrá luego:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad l - x_n < \varepsilon.$$

Luego l es el límite de x_n, y está demostrado el teorema.

Teorema 2.

Toda sucesión convergente es acotada.

En efecto, si la sucesión (x_n) converge a l, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n > p$ implica:

$$|x_n - l| > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad |x_n| < \text{máx}\{|l - \varepsilon|, |l + \varepsilon|\} = m$$

La sucesión $(|x_n|)$ esta entonces acotada por

$$\text{Máx}\ \{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_p|, m\}.$$

Teorema 3.

Sea una sucesión creciente (x_n) (respectivamente decreciente). Entonces (x_n) converge si, y solamente si está acotada superiormente (respectivamente acotada inferiormente). En este caso el límite es el supremo de (x_n), (respectivamente es el ínfimo de (x_n).

De acuerdo con la propiedad de la cota superior, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número natural p tal que $l - x_p < \varepsilon$. Como la sucesión es creciente, además se tiene:

$$(\forall n) \qquad n > p \quad \Rightarrow \quad l \geq x_n \geq x_p \quad \Rightarrow \quad l - x_n \leq l - x_p < \varepsilon$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l.$$

OBSERVACIÓN. Toda sucesión creciente y convergente está acotada superiormente por su límite.
Toda sucesión decreciente y convergente está acotada inferiormente por su límite.

1.2.2. Operaciones sobre los límites de sucesiones

- Adición

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \quad \boldsymbol{y} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \beta \quad \textbf{\textit{implican}} \quad \lim_{n \to \infty} x_n + y_n = \alpha + \beta.$$

- Multiplicación

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \quad \boldsymbol{y} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \beta \quad \textbf{\textit{implican}} \quad \lim_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = \alpha \,.\, \beta$$

Colorario.

<u>Colorario</u>:

Cualquiera que sea $\boldsymbol{\beta \in R}$***,*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ ***implica*** $\lim\limits_{n\to\infty} (\beta\beta_n) = \beta\alpha$**.**

Es suficiente tomar $y_n = \beta$.

- <u>Inversión</u>.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \neq 0$ ***y si*** $\boldsymbol{x_n \neq 0}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n \in N}$***, será*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\alpha}$

PROPIEDAD.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = |\alpha|.$$

De lo estudiado antes, tenemos que,

$$\big|\,|x_n| - |\alpha|\,\big| \leq |x_n - \alpha| .$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un índice p tal que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < \varepsilon.$$

De donde,

$$\big|\,|x_n| - |\alpha|\,\big| < \varepsilon.$$

2. Límite de una función real de variable real

2.1. Límite de una función real de variable real

Sea *f*: *D*$\subset$R $\rightarrow$ R una función y *a* un punto de D$\subset$R tal que existe un entorno perforado en *a*, U_a^*, contenido en el dominio *D*. Se dice que el número real *l* es el *límite de la función f en el punto a*, si y sólo si para cualquier entorno abierto y centrado en *l*, U_l, existe un entorno abierto, centrado y perforado en *a*, U_a^* tal que si $x \in U_a^*$, entonces $f(x) \in U_l$.

Al expresar los entornos en términos de distancia entre puntos, se muestra la forma tradicional de definir límite de una función.

El número l es el límite de la función f en el punto a si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall x \in U_a^* \text{ con } \quad 0 < |x - a| < \delta$$

se verifica que

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$

Se suele considerar la notación

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

para indicar que l es el límite de la función f en el punto a.

EJEMPLO

1)-Para demostrar que: $\lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$; se procede de la siguiente forma:

Supuesto que $|f(x) - 4| < \varepsilon$ se tiene que determinar un número δ tal que:

$|x - 2| < \delta$ y se verifique que $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

$|f(x) - 4| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x + 2 - 4| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - 2| < \varepsilon$ entonces, basta tomar $\varepsilon =.\delta$

2)- Para demostrar que: $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$; debemos demostrar que dado cualquier $\varepsilon .> 0$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que: $\left|1 - \dfrac{x^2}{2} - 1\right| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - 0| < \delta$, o sea $|x| < \delta$.

Ahora bien, $\left|1-\dfrac{x^2}{2}-1\right| = \left|\dfrac{x^2}{2}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x^2| < 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{2\varepsilon}$

Así pues $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right) = 1$

Técnica para comprobar límites

En un problema particular, con el fin de aplicar la definición para probar que l es el límite de la función en el punto a, debemos demostrar que dado $\varepsilon. > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

siempre que $x \in D$, y

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Lo que se necesita es demostrar cómo se elegirá δ para cualquiera sea ε. Es decir debemos dar una regla para la elección de δ en términos de ε. Una forma de hacer esto es la siguiente:

Primero debemos sacar $|x - a|$ como factor de $|f(x) - l|$:

$$|f(x) - l| = |g(x)| \cdot |x - a|.$$

Entonces podemos encontrar un número positivo η tal que siempre que $0 < |x - a| < \eta$, la función g quede acotada, digamos que $|g(x)| \le M$, entonces:

$$|f(x) - l| = |g(x)| \cdot |x - a| \le M \cdot |x - a|$$

siempre que $0 < |x - a| < \eta$, Por otra parte:

$$M \cdot |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $|x - a| < \varepsilon/M$. De donde si $\delta = \min\{\eta, \varepsilon/M\}$ las dos anteriores desigualdades se verifican y

$$|f(x) - l| = |g(x| \cdot |x - a| \le M \cdot |x - a| < \varepsilon$$

siempre que, $0 < |x - a| < \delta$.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que: $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 + 3x - 9) = 2(2)^2 + 3(2) - 9 = 5$.

Se debe observar que si se divide $(2x^2 + 3x - 9 - 5)$ por $(x - 2)$ da por resultado $(2x + 7)$ quiere decir que:

$$|(2x^2 + 3x - 9) - 5| = |(2x + 7)\cdot(x - 2)| = |2x + 7|\cdot|x - 2|$$

Si $|x-2| < 1$ y aplicando propiedad del valor absoluto tenemos que $-1 < x-2 < 1$, y si sumamos 2, queda: $1 < x < 3$. Ahora a esta última desigualdad le multiplicamos por 2 y le sumamos 7 y la desigualdad queda $9 < 2x+7 < 13$. Por consiguiente tendremos:

$$|2x+7| \cdot |x-2| < 13 \cdot |x-2|$$

pero

$$13 \cdot |x-2| < \varepsilon$$

siempre que $|x-2| < \varepsilon/13$. De donde si $\delta = \min\{1, \varepsilon/13\}$, entonces:

$$|(2x^2+3x-9)-5| = |2x+7| \cdot |x-2| < 13 \cdot |x-2| < \varepsilon$$

siempre que

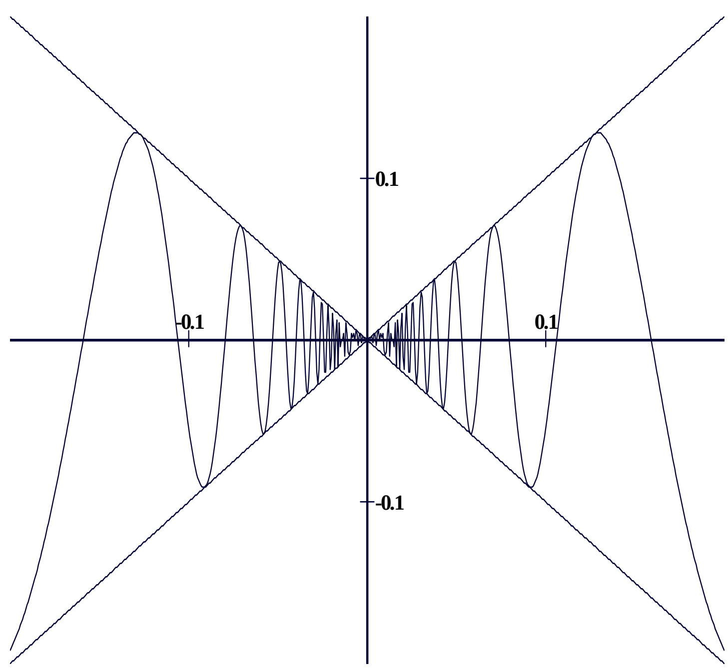
$$0 < |x-2| < \delta.$$

La elección $|x-2| < 1$, es la más sencilla, pero no la única.

<u>Un ejemplo distinto</u>.

Supongamos la función dada por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, y hagamos un bosquejo de su gráfica en las proximidades del 0. Se han dibujado en líneas de puntos, las rectas: $y = x$ e $y = -x$.

A pesar del comportamiento errático de esta función en la proximidad de cero, uno puede observar sin embargo, que f tiende a 0, cerca de 0 y lógicamente uno debería esperar ese resultado al aplicar nuestra definición de límite.



Es decir: $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x \in D$, y $0 < |x - a| < \delta$.

$\lim_{x\to 0} x\cdot \text{sen}\frac{1}{x} = 0$ entonces tendrá que ser:

$|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x \in D$, y $0 < |x - a| < \delta$; es decir:

$|x\cdot \text{sen}\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$ siempre que $x \in D$, y $0 < |x - 0| < \delta$.

$|x\cdot \text{sen}\frac{1}{x}| = |x| \cdot |\text{sen}\frac{1}{x}|$, Se puede observar en la gráfica que:

$|\text{sen}\frac{1}{x}| \leq |x|$, para todo $x \neq 0$.

En consecuencia podemos hacer $|f(x) - 0| < \varepsilon$, haciendo sencillamente $|x| < \varepsilon$.

2.2. Límites laterales

Sea $f\colon D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función y a un punto de **R,** que es un punto de acumulación del dominio D.

- Si existe un intervalo abierto, de extremo superior a, contenido en D, se dice que el número l_1 es el *límite de la función f por la izquierda en el punto a,* o simplemente, el *límite por la izquierda de f en a,* si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall x \in D \quad 0 < a - x < \delta \quad \text{se verifica que } |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

El límite por la izquierda suele denotarse

$$l_1 = \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{o} \qquad l_1 = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$$

- Si existe un intervalo de extremo inferior a contenido en D, se dice que el número l_2 es el *límite de la función f por la derecha en el punto a,* o simplemente, el *límite por la derecha de f en a* si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall x \in D \quad 0 < x - a < \delta \quad \text{se verifica que } |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

El límite por la derecha suele denotarse

$$l_2 = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{o} \qquad l_2 = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$

Existe una relación entre la existencia del límite y la existencia de los límites laterales.

- Si una función posee límite l en el punto a, entonces dicha función posee límite por la izquierda y por la derecha del punto a. Además toman el valor l.

- Si una función posee límite l_1 por la izquierda en el punto a, límite l_2 por la derecha en el punto a, y además coinciden, $l_1 = l_2$, entonces la función posee límite en el punto a, y su valor es el valor de los límites laterales.

OBSERVACIÓN.

Una función $f\colon D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ puede poseer, o no, límite en un punto a. Si no lo tiene, puede ser por alguna de las siguientes razones:

- No existe un entorno abierto perforado en a contenido en el dominio D, es decir, a es un punto aislado de D.

- Los límites laterales existen pero no tienen el mismo valor.

- Algún límite lateral no existe.

- No existe un número real que verifique la definición de límite.

- No existe un número real que verifique la definición de límite lateral.

La función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

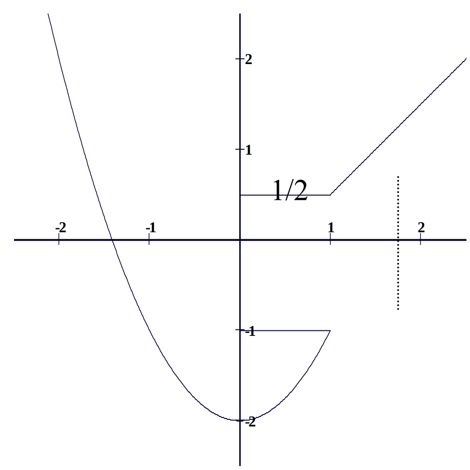
cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

No tiene límite en x = 1 dado que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Según se puede observar en la gráfica.

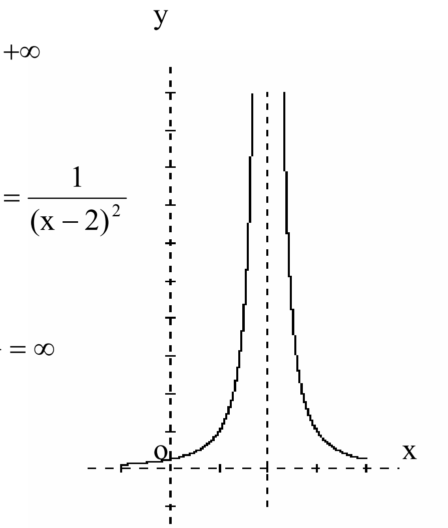


2.3. Límite infinito

Sea $f\colon D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función y a un punto de $\mathbf{R}$ tal que existe un entorno abierto perforado en a, contenido en D.

- Si $\forall\ K \in \mathbf{R}^{+}$, $\exists\delta > 0$, tal que $\forall x \in U_a^*$, $0 < |x - a| < \delta$ se cumple $f(x) > K$, entonces se dice que el *límite de la función f en el punto a es más infinito,* o simplemente, el *límite de f en a es más infinito,* y se denota

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



Por ejemplo la gráfica de la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ que se muestra en la figura. Se puede observar que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

De forma análoga se pueden definir los límites laterales infinitos en un punto tal y como se hizo en el caso de los limites laterales finitos. Además, la relación entre el límite infinito y los límites laterales infinitos es la misma que se enunció para límites y límites laterales.

OBSERVACIÓN.

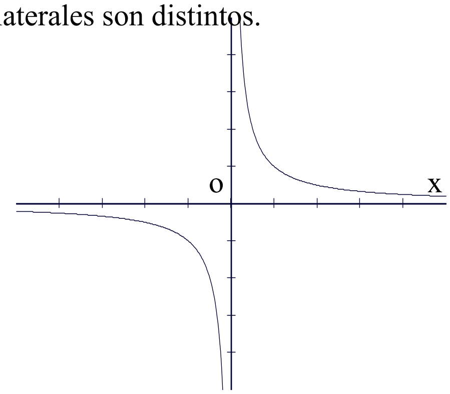
Siempre que se observe la posibilidad de existencia de límite infinito ha de realizarse el estudio de éste mediante el análisis de los límites laterales.

Ejemplo.

Al estudiar la posible existencia de límite en $x = 0$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, se deben calcular los límites laterales:

- *f(x) < 0 si x < 0*, luego $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- *f(x) > 0 si x > 0*, luego
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Observar la gráfica de la función.

y por lo tanto, *no existe límite*, pues los límites laterales son distintos.



2.4. Límite en el infinito

El concepto de límite se generaliza nuevamente de la siguiente forma:

- Sea f: $D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función tal que la semirrecta]p, ∞[está contenida en el dominio D. El número real l_1 es el *límite de la función f en el más infinito*, o simplemente, el límite de f en $+\infty$ si y sólo si

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{R}^+ \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad x > K \quad \text{se cumple} \quad |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

Este límite en el infinito se denota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$$

- Sea f: $D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función tal que la semirrecta]-∞, q[está contenida en el dominio D. El número real l_2 es el *límite de la función f en el menos infinito*, o simplemente, el límite de f en $-\infty$ si y sólo si

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{R}^- \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad x < K \quad \text{se cumple} \quad |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Este límite en el infinito se denota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$$

OBSERVACIÓN.

De forma análoga a como se define el límite infinito en un punto $x = a$ se puede definir el límite infinito en el infinito. Así pues, se considera desde este punto hasta el final del tema la palabra límite en su significado más general posible. Es marco adecuado para interpretar la palabra límite de forma correcta y además esencial en la construcción de gráficas de funciones y de la interpretación de las magnitudes que intervienen en la misma.

2.5. Propiedades del límite de una función

Respecto a las operaciones aritméticas, los límites de funciones cumplen las siguientes propiedades, que aparecen sin demostración, se harán algunas en clases y otras quedarán a cargo del lector o la consulta bibliográfica:

Sean f y g dos funciones tales que.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = k$$

con l y $k \in \mathbf{R}$. Entonces se verifica:

1) $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x); \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

2) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Supuesto que $k \neq 0$ y que $g(x)$ no se anula en un entorno de a.

Respecto a las funciones elementales, los límites de funciones cumplen las propiedades:

5) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^n; \qquad \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$

6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}; \qquad \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$

Si k es un número par, entonces debe ocurrir que $l \geq 0$ y que $f(x) \geq 0$ en un entorno del punto a.

7) $\lim_{x \to a} \left(\log_b f(x) \right) = \log_b \left(\lim_{x \to a} f(x) \right); \qquad \forall b \in \mathbf{R}^+$

supuesto que $f(x) > 0$ en un entorno del punto a.

8) $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)}; \qquad \forall b \in \mathbf{R}^+$

9) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^{\lim_{x \to a} g(x)}$

supuesto que $f(x) > 0$ en un entorno del punto a.

Respecto al orden de **R**, los límites cumplen las propiedades siguientes:

Sean f, g y h tres funciones, y sea a un punto de **R** tal que existe un entorno abierto y perforado en a, U_a^*, en el cual las tres funciones están definidas. Si se cumplen las condiciones:

1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x); \quad \forall x \in U_a^*$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l. \qquad \text{con } l \in \mathbf{R}$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

Todas las propiedades expuestas son igualmente aplicables al considerar límites finitos, o infinitos, en un punto o en el infinito, siempre que no se produzca ninguna de las siguientes indeterminaciones.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \bullet \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

En los casos en los que se produzca indeterminación, se procede a reducir dicha indeterminación transformando la expresión del límite.

3.1. Continuidad de una función

La noción intuitiva de función continua se puede suponer tiene una naturaleza global, al decirse que una función definida sobre un intervalo abierto incluído en el dominio de la función es continua si, y sólo si, la gráfica de la función se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel.

Sin embargo, la noción de función continua tiene naturaleza local, es decir, es relativa al comportamiento de la función en un entorno abierto de un punto. Así pues, vamos a decir que una *función f es continua en un punto a* de su dominio si y sólo si existe el límite de la función f en ese punto a, y su valor es $f(a)$.

$$f\!: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{continua en } a \in D \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x \to a} f(x) \quad f(a)$$

La definición se puede expresar de las siguientes formas:

Sea $f\!: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función $a \in D$ tal que existe un entorno abierto y centrado en a, U_a, contenido en D.

- La función f es una función continua en el punto a, si y sólo si para cualquier entorno abierto y centrado en $f(a)$, $U_{f(a)}$, existe un entorno abierto y centrado en a, U_a tal que

$$\forall x \in U_a \quad \text{se verifica que} \quad f(x) \in U_{f(a)}.$$

- La función f es una función continua en el punto a si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \; |x - a| < \delta \quad \text{se verifica que}$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

La definición establece la continuidad tan sólo en un punto de su dominio y, se deduce de la misma que una función sin límite finito en un punto, no puede ser continua en dicho punto.

Se dice que una función f es continua en un conjunto si y sólo si dicha función es continua en cada punto del conjunto. Es decir,

$$f \text{ es una } \underline{\textit{función continua en}} \;\; H \subset \mathbf{R} \;\Leftrightarrow\; f \text{ es continua en } x, \;\; \forall x \in H.$$

EJEMPLO

La función $f(x) = x^2$ es una función continua en $x = 1$. Para observar esto, se considera que

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \text{ y se tiene que determinar un número } \delta, \text{ con } |x - 1| < \delta.$$

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |(x-1)(x+1)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - 1| \cdot |x + 1| < \varepsilon.$$

Ahora bien,

$$|(x-1)| < |x - 1| \cdot |x + 1|, \text{ puesto que } |1 + x| > 1, \text{ por tanto, } \quad |x - 1| < \varepsilon.$$

Basta considerar $\delta = \varepsilon$.

Como para cada valor $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \varepsilon$ tal que si $|x - 1| < \delta$ se verifica $f(x) - f(1)| < \varepsilon$, entonces la función f es continua en $x = 1$.

3.2. Continuidad lateral

Dada una función *f: D* $\subset$ R $\rightarrow$ R y un punto $a \in D$, puede ocurrir que no exista un entorno abierto y centrado en *a*, contenido en el dominio *D*, con lo cual no puede existir el límite de *f* en *a*, sin embargo, puede existir algún límite lateral en *a*.

- La función *f* es *continua por la izquierda en el punto a* si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a) \tag{21}$$

es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{con} \quad a - x < \delta \quad \text{se verifica que}$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- La función *f* es *continua por la derecha en el punto a*, si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{con} \quad x - a < \delta \quad \text{se verifica que}$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Observación.

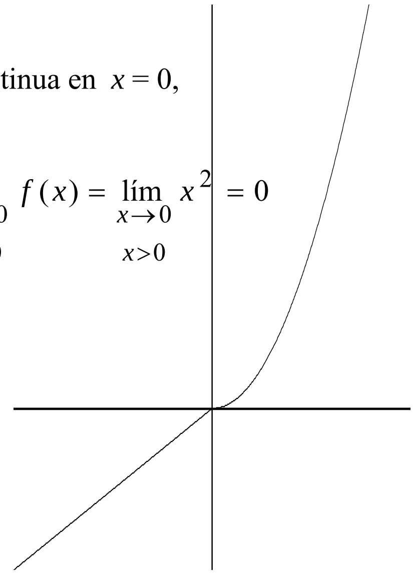
Una función continua en un punto, tendrá que ser continua por la izquierda y por la derecha en ese punto, y viceversa.

EJEMPLO

La función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es una función continua en $x = 0$,

puesto que

$f(a) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x = 0$ y $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 = 0$



3.3. El Álgebra de las Funciones Continuas

En este punto se desarrollan los resultados que relacionan la continuidad y las leyes de composición internas (operaciones) y externas definidas sobre funciones reales de variable real.

3.3.1. Teorema de la conservación respecto a la suma y producto de funciones

Sean f y g dos funciones continuas en un punto $a \in \mathbf{R}$. Entonces,

1) La función $f + g$ es continua en a.

2) La función $\lambda \cdot f$ es continua en a con $\lambda \in \mathbf{R}$

3) La función $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$, con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, es continua en a.

4) La función $f \cdot g$ es continua en a.

5) Si $g(a) \neq 0$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

La demostración de estos cinco apartados se puede basar en las propiedades de los límites, estudiadas antes.

3.3.2. Teorema de la conservación respecto a la composición

Sea f una función continua en el punto $a \in \mathbf{R}$ y g una función continua en el punto $f(a) \in \mathbf{R}$, entonces la función $g \circ f$ es continua en el punto a.

Demostración.

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g \circ (f(a)) = g \circ f(a)$$

puesto que la función g es continua en $f(a)$ y la función f es continua en a

$$g\big(f(a)\big) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g\left(f\left(\lim_{x \to a} x\right)\right) = g \circ f(a)$$

NOTA.- El conjunto de las funciones reales, de variable real, continuas dotado de la suma y el producto tiene estructura de anillo; dotado de la suma y el producto por un escalar tiene estructura de espacio vectorial; y dotado de la composición tiene estructura de semigrupo con elemento unidad.

3.4. Discontinuidades de una función

Al hablar de continuidad, ha de observarse el contexto donde se expresa para poder extraer el significado correcto; continuidad o continuidad lateral.

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función y a un punto de $\mathbf{R}$ tal que existe un entorno perforado en a, U_a^*, contenido en D.

Se dice que f es discontinua en a si y sólo si f no es continua en a.

Una función puede ser discontinua en un punto por:

- No coincidir el límite con el valor de la función
- No estar definida la función en el punto.
- No existir límite finito en dicho punto.

A continuación se distinguen distintos puntos de discontinuidad. Ha de observarse que la función debe estar definida en un entorno perforado de la discontinuidad.

3.4.1. Discontinuidad evitable

La función f tiene *un punto de discontinuidad evitable* en $a \in \mathbf{R}$ si y sólo si existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l, \qquad l \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad l \neq f(a) \qquad \text{si existe } f \text{ en } a,$$

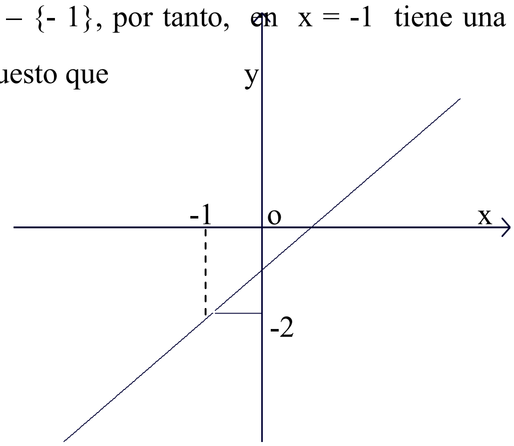
Así pues, si f es continua en $\mathbf{R} - \{a\}$, entonces la función siguiente es continua en $\mathbf{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

EJEMPLO

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ está definida en $\mathbf{R} - \{-1\}$, por tanto, en x = -1 tiene una discontinuidad; esta discontinuidad es evitable, puesto que la función dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \end{cases}$$



es una función continua en $\mathbf{R}$, y su gráfica coincide con la gráfica de f salvo en x = - 1.

La gráfica correspondiente es una línea recta

3.4.2. Discontinuidad de salto

La función f tiene un *punto de discontinuidad de salto* en $a \in \mathbf{R}$ si y sólo si existen los límites laterales y son distintos

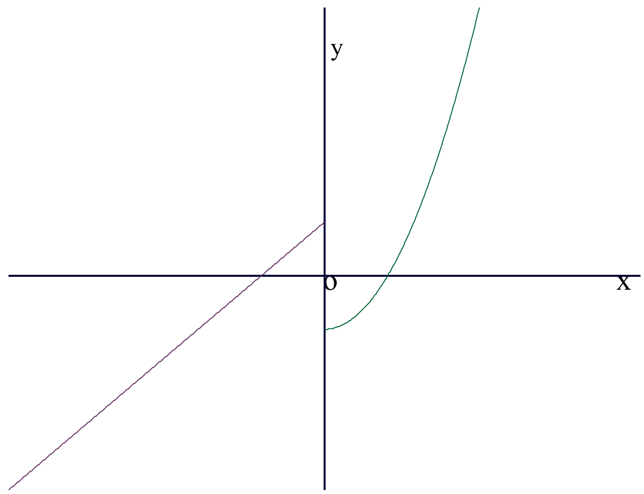
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_1; \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} x = l_2 \quad \text{y} \quad l_1 \neq l_2; \qquad l_1, l_2 \in \mathbf{R}$$

Se denomina salto de la función a $|l_1 - l_2|$.

EJEMPLO.

La función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+1)=1 \quad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1 \quad .$$



3.4.3. Discontinuidad de tendencia al infinito

La función f tiene un *punto de discontinuidad de tendencia al infinito* en $a\in\mathbf{R}$, si y sólo si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- Existe límite de f en a y es infinito.
- No existe límite finito de f en a y algún límite lateral de f en a es infinito

EJEMPLO.

Las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ tienen una discontinuidad de tendencia al infinito en $x = 0$. Se deberá calcular los límites laterales en 0 y dibujar sus gráficas.

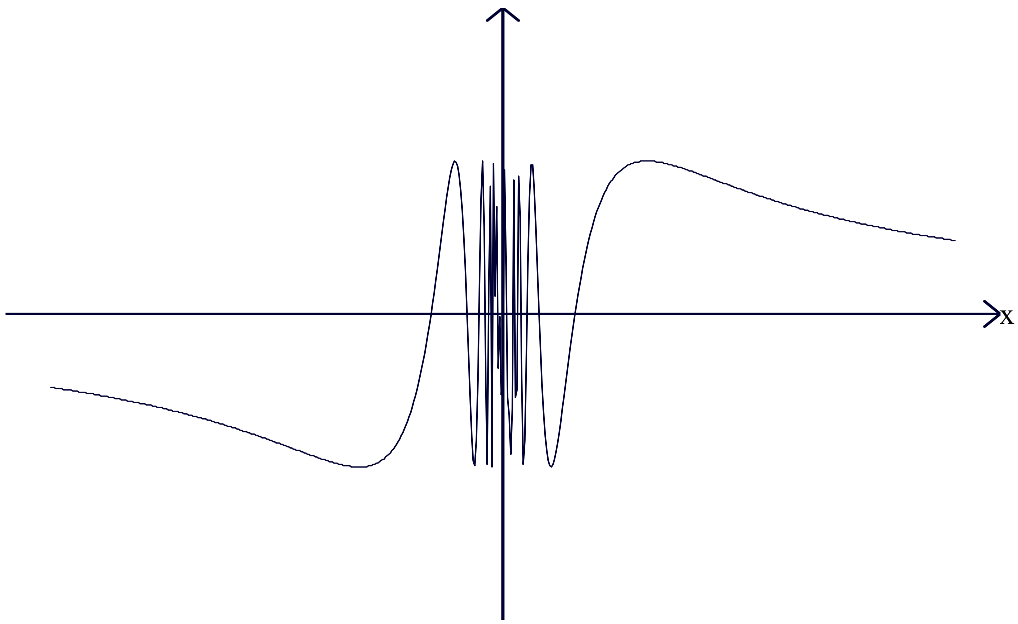
3.4.4. Discontinuidad esencial

La función f tiene *un punto de discontinuidad esencial* en $a \in \mathbf{R}$ si y sólo si ni existe límite, finito o no, ni existen límites laterales, finitos o no.

A las discontinuidades evitable y de salto se les denomina discontinuidades de primera especie; a las demás, discontinuidades de segunda especie.

EJEMPLO

La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, puesto que no existe ninguna clase de límite en $x = 0$. Esto se debe a que al aproximarse a $x = 0$ la función oscila infinitas veces.



EJERCICIO: Estudiar los puntos de discontinuidad de la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - x}$

4.1. Cálculo de límites

Para calcular el límite de una función continua f en un punto $a \in \mathbf{R}$, se procede a sustituir la variable por el valor a, es decir, en realidad se calcula *f(a).*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) = f(a)$$

Por extensión se realiza el mismo proceso para cualquier otra función que sea continua en un entorno del punto a, salvo, a lo más, en ese punto. Puede ocurrir que se produzca una indeterminación, entonces se procede a reducir dicha indeterminación mediante diversos mecanismos.

-Modificar la expresión del límite. Consiste en transformar la expresión del límite mediante transformaciones algebraicas de esta, por ejemplo multiplicar o dividir por una expresión, sumar y restar una expresión, simplificar la expresión...
-*Hacer un cambio de variable.* Consiste en poner la variable de la expresión del límite en función de otra variable, de esta forma el límite se transforma en otro más sencillo de calcular en la nueva variable.
Mecanismo del cálculo diferencial. Consiste en aplicar la regla de l'Hôpital que se estudiará más adelante.
Utilizar el concepto de infinitésimos equivalentes. Consiste en sustituir una función por otra función que cumple con ciertas propiedades. (Se estudia a continuación).

EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^3+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt{x}}$

4.2. Infinitésimos

Se dice que una función *f(x)* es un *infinitésimo* para *x* tendiendo a x_0, donde $x_0 \in \mathbf{R}$ o $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ si y sólo si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Al observar las propiedades de los límites respecto a las operaciones aritméticas se puede deducir las siguientes propiedades de los infinitésimos:

- La propiedad que sigue de los infinitésimos es válida.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\right) = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo. Es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0$$

Al observar las propiedades de las funciones continuas se puede deducir la siguiente:

- Sea $g: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua tal que $g(0) = 0$ y sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un infinitésimo para $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 = \infty$ o $x_0 = -\infty$). Entonces $g \circ f$ es un infinitésimo para $x \to x_0$.

Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(0) = 0$$

EJEMPLOS.

Las siguientes funciones son infinitésimos:

- $f(x) = x^n$, para $x \to 0$, $\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
- $f(x) = (x - a)^n$, para $x \to a$, $\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$, para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$, $\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$.
- $f(x) = a^x - 1$, para $x \to 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$
- $f(x) = sen\ x$, ($tg\ x$; $arc\ sen\ x$; $arc\ tg\ x$), para $x \to 0$.
- $f(x) = log(1 + x)$, para $x \to 0$.
- $f(x) = 1 - cos\ x$, para $x \to 0$.

4.3. Infinitésimos equivalentes

Al comparar dos infinitésimos se puede observar la rapidez con la cual tienden a cero dichos infinitésimos. Esto sugiere medir dicha rapidez, para lo cual se considera la siguiente escala de medida:

$$\begin{array}{ll} x^n & \text{para } x \to 0, \ \forall n \in \mathbf{N} - \{0\} \\ (x-a)^n & \text{para } x \to a, \ \forall n \in \mathbf{N} - \{0\} \text{ y } a \in \mathbf{R} \\ \frac{1}{x^n} & \text{para } x \to \infty \text{ y } x \to -\infty, \ \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}. \end{array}$$

Se dice que un <u>*infinitésimo*</u> *f es de* <u>*orden n*</u> $\in \mathbf{N} - \{0\}$ para $x \to x_0$ si y sólo si (según el valor de x_0, $x_0 = 0$, $x_0 = a$, $x_0 = \infty$).

Esto es: $\displaystyle lím_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = k$; $\displaystyle lím_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = k$; $\displaystyle lím_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^n}} = k$; donde $k \in \mathbf{R}^*$

Dos infinitésimos *f, g,* de un mismo orden se dicen <u>*equivalentes*</u> si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si en un límite aparece un infinitésimo multiplicado o dividiendo, éste se puede sustituir por otro infinitésimo equivalente. Esta regla no es válida en el caso de estar sumando o restando dicho infinitésimo.

OBSERVACIÓN

Las nociones de infinitésimo y de infinitésimos equivalentes están íntimamente unidas al concepto de aproximación local de una función en un punto. Esta cuestión se desarrollará mas adelante, donde se presentan los desarrollos de Taylor de una función.

EJEMPLOS

- Las funciones dadas por: sen x, tg x, arc sen x, arc tg x, e^x son infinitésimos equivalentes de $f(x) = x$, en $x = 0$.
- La función dada por $1 - \cos x$ es infinitésimo equivalente de $f(x) = x^2/2$ en $x = 0$.
- La regla de correspondencia $\log x$ es infinitésimo equivalente de $f(x) = x - 1$ en $x = 1$.

<u>TEST</u>.

1) Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$; utilice una calculadora para tabular los valores de f(x) cuando x toma los valores: 4; 4,5; 4,9; 4,999 y cuando x es igual a 6; 5,5; 5,1; 5,01; 5,001. ¿A qué valores parece que se aproxima f(x) conforme x tiende a 5?.

2) Para cada una de las siguientes funciones decir para qué números a, existe el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: a) $f(x) = x^2 - a$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - a}$.

Dentro de lo posible, interpretar geométricamente. (¡Cuidado!, “a puede ser mayor que cero, cero o menor que cero”.

3) Si cuando $x \to +\infty$; $f(x) \to +\infty$ y $g(x) \to 0^+$, a qué tiende el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4) Diga que significado geométrico se le puede dar a los siguientes resultados: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

5) Para la función dada por $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<3\\ 5-x & \text{si } x\geq 3\end{cases}$; dibuje la gráfica de la función y calcule, si existen los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

d) ¿Qué puede decir de la continuidad de esta función?

6) Dada la función por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; a) en x = 2, ¿tiene límite finito o infinito, o ninguno de los dos?; b) Trate dentro de lo posible dibujar la gráfica de esta función; c) analice la continuidad de esta función.

7) Dada una función por $f(x) = Ae^{Bx} + C$. Asígnele valores a los números A, B y C para que: i) el conjunto imagen sea $]-5, +\infty[$; ii) corte al eje de ordenadas en $y = -3$; iii) tenga un cero en $x = 2$.

Bibliografía:

Calculus. Apóstol.
Cálculo Infinitesimal de una Variable. De Burgos.
Calculus. Spivak.
El Cálculo. Leithold.
Mathématiques spéciales. Ramis- Deschamps- Odoux.
Mathématiques supérieures. Doneddu.

Parte II - GUÍA Nº1: *Límite y Continuidad de Funciones Reales.*

EJ. Nº1. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} k$; ($k \in R$, constante) b) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2)$ c) $\lim\limits_{x \to 3} (3 + \sqrt{3x})$ d) $\lim\limits_{x \to 1} (4x - 1)^5$

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x - 4}{6x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - x - 2}$ g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$ h) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1}$ i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$

EJ. Nº2. Diga si las siguientes funciones tienen límite: a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ en $x = 1$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ en $x = 1$ d) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $x = 0$

EJ. Nº3. Encuentre $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ para la función dada:

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ d) $f(x) = - x^{-2} + 2$

EJ. Nº4. a) Represente el grafo de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Con la gráfica hecha en a), defina el valor de los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

EJ. Nº5. Complete los espacios en blanco.

a) $\lim\limits_{x \to ----} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to ---} x^3 = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to ---} \dfrac{x - 2}{x - 1} = 1$

EJ. Nº6. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

a) seno b) coseno c) $f(x) = 3x – 1$ en $x = - 2$ d) $f(x) = \text{sen}\,(x + 2)$

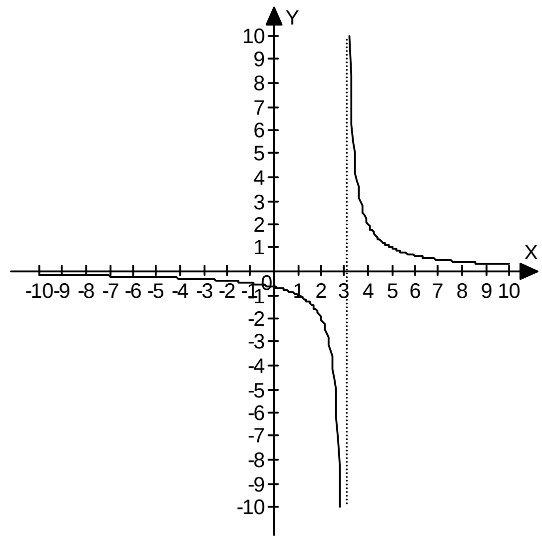
e) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ f) $f(x) = |x|$ en $x = 0$ g) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ x^3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 - kx & \text{si } x > 3 \end{cases}$ es continua en 3, si k = -------.

Ej. Nº7. Para la función de la figura, hallar: a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ c) f(3)

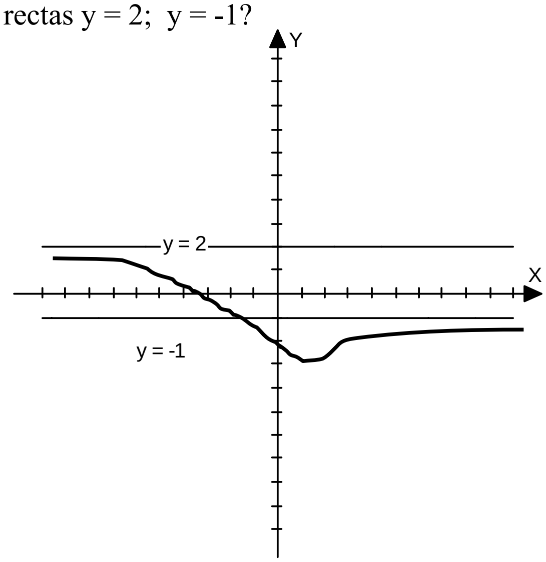
¿Qué conclusión obtiene de lo observado? ¿Tiene límite la función en x = 3?

¿Qué representa la ecuación x = 3?



EJ. Nº8. Para la función de la figura, determine: a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) ¿Qué representan las rectas y = 2; y = -1?



EJ. Nº9. Represente gráficamente una función f: R→ R que satisfaga las condiciones siguientes: f(0) = 1; f(4) = 0; f(5) = -1; f(6) = 0; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$.

Derivadas

4. Derivadas

Para estudiar el tema que sigue, Derivadas, sería prudente que el lector recuerde los conceptos y conteste las preguntas que se formulan en el cuestionario de abajo, para que la lectura de derivadas sea más sencilla y el estudio más efectivo.

De cualquier manera, no se debe perder de vista que el presente escrito solo tiene el carácter de guía de estudios y conforma un complemento de las clases teóricas.

Es decir, para que el estudio de esta guía sea eficaz, el alumno necesariamente deberá asistir a las clases de Matemática 1 (Farmacia y Bioquímica), y Matemática/92 (Licenciatura en Genética, Profesorado en Biología) en las cuales el Profesor desarrolla con mayor amplitud los conceptos que aquí aparecen, a veces en forma muy resumida o de teoremas no demostrados; también en clases se hacen interpretaciones gráficas, que muchas veces el alumno no encontrará en esta guía de estudios.

En el caso de que algún alumno no pueda asistir a las clases, deberá utilizar en forma complementaria la bibliografía que se indique en cada caso, o consultar en el Gabinete de Matemática.

Cuestionario

1. Ecuaciones de la recta: ecuación vectorial, ecuaciones cartesianas.

2. ¿Qué relación existe entre la pendiente de una recta dada por $y = mx + b$ y las coordenadas de un vector que tenga la misma dirección de la recta?

3. ¿Cuándo se dice que una función es creciente en un intervalo de su dominio?.

4. ¿Cuándo se dice que una función es decreciente en un intervalo de su dominio?

5. ¿Qué entiende por composición de funciones reales de variable real?

6. Dadas $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + h$; determine $f[g(x)]$.

7. Concepto de límite: límite por derecha y por izquierda de una función real de variable real en un punto dado del dominio.

8. Repase la definición de continuidad de funciones reales de variable real.

9. Dada una función f; i) -Interprete los siguiente resultados: a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$; e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$; f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. g) -La función f , ¿es continua en x = 3?. Fundamente la respuesta. Dibuje la gráfica de una función que cumpla todas estas condiciones.

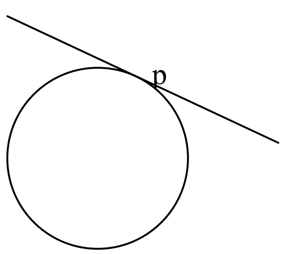
4.1. Recta tangente a la gráfica de una función real de variable real

Determinar si una recta es tangente o secante a una circunferencia consiste en estudiar si dicha recta toca a la circunferencia en uno o dos puntos, respectivamente. Así pues, una recta es tangente a una circunferencia**,** si toca a esta es un único punto.

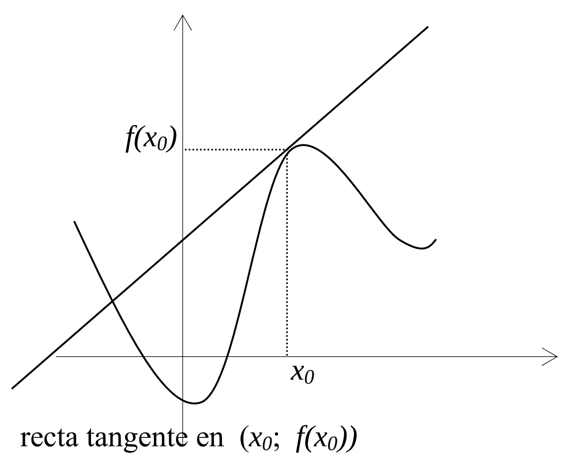
Al intentar generalizar el concepto de recta tangente a la gráfica de una función no puede emplearse la anterior caracterización de la recta tangente. Por tanto, no es correcto decir que una recta es tangente a la gráfica de una función en un punto si toca únicamente a la gráfica en ese punto.

Generalizar el concepto de recta tangente a la gráfica de una función en un punto, requiere el estudio de cortes de la recta y la gráfica en un entorno del punto de tangencia. Es decir, se realiza mediante un estudio local.

Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua y x_0 un punto del interior del intervalo $[a, b]$. Lo que sigue es un estudio para determinar una definición que nos permita tener claro el concepto de recta tangente, que geométricamente lo hemos dibujado más abajo.



Tangente



recta tangente en $(x_0;\ f(x_0))$

4.1.1. Pendiente de la recta tangente a una curva en un punto

Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función continua y x_0 un punto de $\mathbf{R}$ en el cual la gráfica de la función posee recta tangente no paralela al eje OY. Se considera el intervalo $[a, b]$, que contiene al punto x_0 en su interior. El vector que tiene por origen y extremo a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es, $\mathbf{v} = (b - a;\ f(b) - f(a))$ y, tendrá la misma dirección de la recta secante a la gráfica de la función que pasa por esos dos puntos y por consiguiente, la misma pendiente.

La pendiente de la recta secante tendrá que ser el número dado por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A continuación se considera otro intervalo $[a_1, b_1]$, que contiene al punto x_0 en su interior e, incluído en el anterior. Se determina la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función en los puntos $(a_1, f(a_1))$ y $(b_1, f(b_1))$ como,

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$$

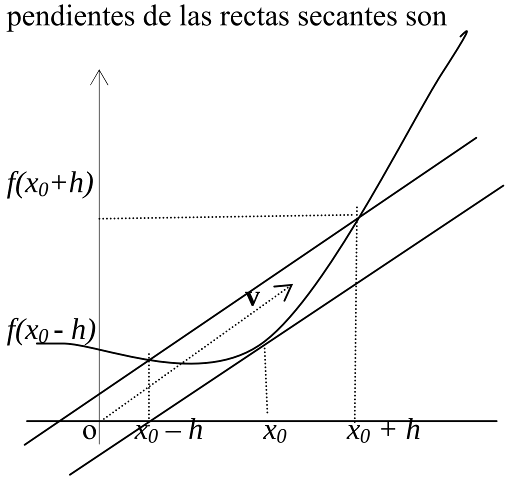
Este proceso puede reiterarse y, por tanto, construir una familia de rectas secantes en los puntos correspondientes a los extremos de intervalos incluídos unos en otros y que contienen al punto x_0. (*Hacer una gráfica, que refleje esta situación*).

Si, por ejemplo, se elige la familia de intervalos de la forma

$$[x_0 - h, x_0 + h] \text{ con } h \in \mathbf{R}^+$$

se puede observar que, al considerar que h tienda a 0, la familia de intervalos se contrae al punto x_0.

Las rectas secantes se "aproximan" cada vez más a la recta tangente en el punto x_0, al considerar valores cada vez más pequeños del número h. Por tanto, las pendientes de las rectas secantes son



$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

y se aproximan cada vez más a la pendiente de la recta tangente:

$$\underset{h\to 0}{lím}\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \beta$$

β es entonces la pendiente de la recta tangente en el punto x_0 y es independiente de la familia de rectas secantes que se considere. De manera que el vector **v = (**1, β), es un vector director de la recta tangente.

Así pues, si los puntos que se forman para calcular la pendiente de la recta tangente son los extremos de un entorno de x_0, se tiene que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

donde x_0 puede ser un número negativo o positivo; o, escrito de otra forma, tomando $x_0 + t = x$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

DEFINICIÓN

Sea $f : [a, b] \to$ R una función continua y x_0 un punto de $]a, b[$, se dice que la recta

$$(x, y) = (x_0, f(x_0)) + \lambda(1, \beta)$$

o en su forma cartesiana

$$y - f(x_0) = k(x - x_0), \text{ con } k = \beta$$

es la *recta tangente* a la gráfica de f en el punto x_0 si y solo sí

$$k = \beta = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4.2. Derivadas. Funciones diferenciables de **R** en **R**

Introducción

La derivación permite el *estudio local* de las funciones, mientras que la integración se aplica a *problemas globales.* Aunque en sus orígenes la derivación y la integración se presentaron como procesos inversos, análisis rigurosos tanto de sus propiedades como de los problemas que originaron su descubrimiento, han conducido a estudios autónomos de cada uno de ellos.

Siguiendo el orden usual se tratará primeramente de la derivación, que como se ha indicado es el instrumento para estudiar la variación local de una función, y que desde el punto de vista geométrico equivale al *problema de la tangente.*

Si f es una función real de variable real, la diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0)$ mide lo que ha variado la función a lo largo del intervalo $[x_0 , x_0 + h]$. Sin embargo este valor no es muy indicativo, pues depende esencialmente de la longitud del intervalo, por lo cual conviene considerar el valor promedio, es decir,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta variación media puede dar una información defectuosa sobre el comportamiento de f en $[x_0 , x_0 + h]$, que sólo será precisa para aquellas funciones en las que el valor promedio sea independiente de la longitud del intervalo. Cuando esto ocurre es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l \quad \text{o} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = l \cdot h \quad h \neq 0$$

por lo que la función f ha de ser afín, y su gráfica cartesiana una recta, cosa que normalmente no sucede.

En todo caso, la variación media de f en la proximidad del punto x_0 será tanto más fidedigna, cuanto menor sea el intervalo $[x_0 , x_0 + h]$, lo que lleva al estudio del límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

que cuando existe se denomina *derivada de la función f en el punto $x = x_0$*.

Si se designa por $f'(x_0)$, se puede considerar la función

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

como aproximación de f en el entorno de $x = x_0$. Su gráfica cartesiana es la *recta tangente* a la gráfica de la función.

Algunas propiedades de f son las mismas que las de su aproximación tangente. Así ocurre que si la pendiente $f'(x_0)$ de la tangente es positiva, la función f será creciente en $x = x_0$, y si es negativa, decreciente; mientras que si la función es constante en $x = x_0$, será $f'(x_0) = 0$.

Al introducir el instrumento de la derivación en el Análisis se presentan inmediatamente dos cuestiones: la existencia de la derivada y su cálculo.

No todas las funciones tienen derivada.

El cálculo de las derivadas, que tiene menor importancia conceptual, responde a una técnica, que se basa en el cálculo directo de las derivadas de algunas funciones, entre las que se encuentran las *elementales*, y un conjunto de reglas, para obtener las derivadas de funciones a partir de otras de derivadas conocidas. Estas reglas son bien de *tipo algebraico*, o de *naturaleza funcional*, como son la *derivación de las funciones compuestas* y la *derivación de las inversas*.

4.2.1. Definición de la derivada

Sea la función real de variable real : $\begin{pmatrix} f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$.

A la función que se denota f ' y se define como:

$$\begin{pmatrix} f ': D' \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{pmatrix}$$

se la llama ***función derivada de f***.

Por otra parte si dado *f:* $D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con x_0 y $x_0 + h$ elementos del dominio, tiene límite cuando *h* tiende hacia cero, se dice que *f* es *derivable* en x_0, y se utiliza la notación:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Se dice también que $f'(x_0)$ es la derivada en el punto x_0 o también se lo denomina ***número derivado*** de $x \mapsto f(x)$ en x_0. Se trata aquí de un límite en sentido estricto. No intervienen los puntos $+\infty$ y $-\infty$.

De la unicidad del límite resulta que, si la derivada existe es única.

4.2.2. Derivada a la derecha, derivada a la izquierda

Si la función $h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, (1), tiene límite cuando *h* tiende hacia cero por *derecha*, este límite se denomina *derivada por derecha* y se denota $f'(x_0^+)$.

Si la función (1), tiene límite cuando *h* tiende a cero por *izquierda*, este límite se denomina *derivada por izquierda* y se denota $f'(x_0^-)$.

EJEMPLO

$f(x) = |x|$ es una aplicación definida en **R**. Se tiene:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1,$$

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-x-h+x}{h}\right) = -1,$$

Para $x = 0$, se tiene

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

En consecuencia,

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = +1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

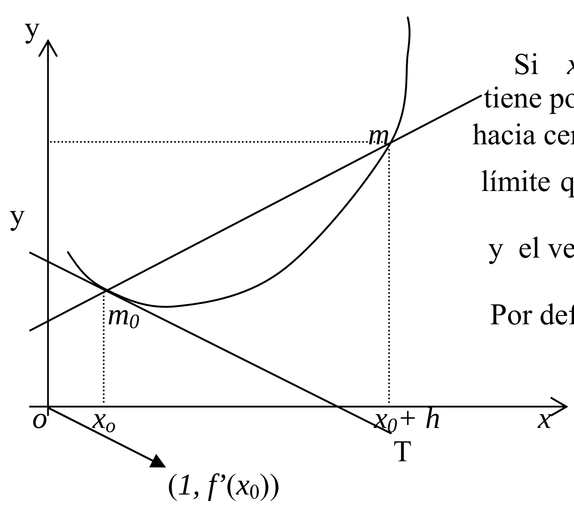
En el punto 0, f tiene derivada por derecha $+1$ y derivada por izquierda -1. La función no tiene derivada en el punto 0.

Tomando el ejemplo anterior como un contraejemplo, y recordando que la función valor absoluto es una función continua en todo su dominio, podemos decir que: *la continuidad de una función en un punto* ***no implica*** *que sea derivable en ese punto* (ver más adelante).

4.2.3. Interpretación geométrica

Sea Γ el grafo de la función $y = f(x)$ en el plano $\mathbf{R}^2$ con un sistema de referencia ortonormal. Si m_0 y m son los puntos de Γ de abscisas respectivas x_0 y $x_0 + h$, entonces el vector director $(1, \beta)$ de la recta secante $D_{m_0 m}$ tiene por ordenada:

$$\beta = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



Si $x \mapsto f(x)$ es derivable en x_0, entonces β tiene por límite la derivada $f'(x_0)$ cuando h tiende hacia cero, en consecuencia, la recta $D_{m_0 m}$ tiene un límite que es la recta T definida por el punto m_0 y el vector director es $(1, f'(x_0))$

Por definición, esta recta límite T se denomina:

la tangente en m_0 de Γ

PROPIEDAD

Si la función $x \mapsto f(x)$ es derivable en x_0, la tangente en el punto del correspondiente gráfico existe y tiene por vector director $(1, f'(x_0))$. Es decir:

El número derivado, f '(x_0), es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Por consiguiente la ecuación vectorial de la recta tangente es:

$$m = m_0 + \lambda v, \quad \text{o sea:} \quad (x, y) = (x_0, f(x_0)) + \lambda(1, f'(x_0)).$$

y, la cartesiana:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \textit{con pendiente } f'(x_0).$$

Ahora si, estamos en condiciones de definir a la tangente:

***Definimos la tangente a la gráfica de f en* $(x_0, f(x_0))$ *como la recta que pasa por* $(x_0, f(x_0))$ *y tiene por pendiente* f '(x_0).** Esto quiere decir que la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ solo está definida si f es derivable en x_0.

La definición de derivada se generaliza considerando límites infinitos.

DEFINICIÓN

Sea la función $f: D \subset R \to R$ y $x_0 \in D$. *Se dice que derivada de f es* $+\infty$ *en el punto* $x = x_0$, *si f es continua en* x_0 *y existe el límite infinito:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$

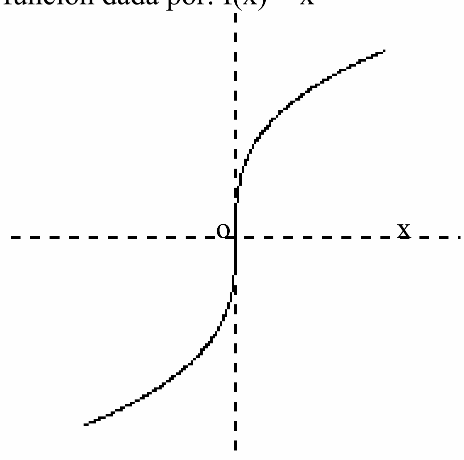
Hay que advertir que en las definiciones de derivadas infinitas en un punto, se *exige la continuidad de la función en el punto.*

Con lenguaje geométrico, la existencia de derivada implica la de tangente a la gráfica de la función, y la de tangente implica la continuidad de dicha gráfica. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición de derivada.

EJEMPLO

La función $f(x) = x^{1/3}$ tiene derivada $+\infty$ en $x = 0$, pues la función es manifiestamente continua en $x = 0$.

Gráfica de la función dada por: $f(x) = x^{1/3}$



4.3. Función diferenciable en un punto

Daremos aquí una definición de funciones diferenciables de **R** en **R** para poner en evidencia la noción fundamental del cálculo diferencial que es el de aproximar funciones por medio de aplicaciones lineales. Esta forma de proceder se repetirá luego para las funciones de **R** en $\mathbf{R}^n$, y después para las funciones de $\mathbf{R}^p$ en $\mathbf{R}^n$.

Es bueno que el estudiante se familiarice con este método de estudio de las funciones reales de una variable real, funciones que se conocen de los temas anteriores.

DEFINICIÓN

Sea $f\colon D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $x_0 \in D$, *se dice que f es diferenciable en* x_0, *si existe una función* $h \mapsto \varepsilon(h)$, *definida en un entorno de cero y un número real* $a \in \mathbf{R}$, *independiente de h, tal que:*

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \qquad \text{con} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

4.3.1. Relaciones entre diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad

Diferenciabilidad y derivabilidad

Teorema:

Para que una función f: D $\subset R \to R$, sea diferenciable en $x_0 \in D$, es necesario y suficiente que sea derivable en x_0.

Necesidad.

Si f es diferenciable, se tiene:

$$h \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + \varepsilon(h)$$

y, por consiguiente:

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a\,.$$

Por consiguiente, f es derivable en x_0 y además $a = f'(x_0)$.

OBSERVACIÓN

Si tomamos la función $g\colon\ x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)\cdot f'(x_0);\quad \begin{cases} \text{con } x = x_0 + h \\ y\ (x - x_0) = h \end{cases}$

Entonces: $g(x_0 + h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0)$ *y* la función g es de primer grado y su gráfica cartesiana una recta.

Evidentemente es:

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - g(x_0+h) = 0\,,$$

lo que indica que g es una aproximación a f en un entorno de x_0. Pero como se verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-g(x_0+h)}{h} = 0$$

y $h = x - x_0$ elevado a la primera potencia se dice que g es una aproximación de primer orden de f en x_0 o en términos geométricos, que las gráficas de f y g son tangentes.

Suficiencia.

Supongamos f derivable en x_0; entonces: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

implica

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h\cdot f'(x_0)}{h}=0$$

tomamos $\varepsilon(0) = 0$ y, si $h \neq 0$,

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}$$

se tiene entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h \qquad \text{con} \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

En consecuencia, f es diferenciable en x_0.

Diferenciabilidad y continuidad

Teorema:

Si una función f: D $\subset R \to R$, es diferenciable en $x_0 \in D$, entonces es continua en x_0.

En cambio la recíproca de ésta implicación no se verifica; es decir si una función es continua no necesariamente será derivable o diferenciable.

Demostración:

Si f es diferenciable en un punto $x_0 \in D$, se deberá cumplir:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h \qquad \text{con} \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Si tomamos $x_0 + h = x$, y, además observando que si h tiende a cero entonces x tiende a x_0. Al aplicar límite a la expresión dada de la diferenciabilidad resulta:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\varepsilon(h)\cdot h\right]$$

Es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,;$$

que es la definición de continuidad de la función en x_0

Por otra parte, la recíproca, es decir el hecho de que una función continua en un punto, no siempre es derivable lo mostraremos haciendo el siguiente ejemplo:

Sabemos que la función valor absoluto es una función continua en todo su dominio, en particular sabemos que:

$\lim_{x\to 0}|x|=|\,0\,|=0$, esto es la función es continua en $x_0 = 0$

pero, si calculamos la derivada en $x_0 = 0$, vemos que en ese punto la función <u>no tiene</u> derivada; como se observa:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{; dado que } h > 0$$

en cambio:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \text{; dado que } h < 0.$$

Por consiguiente la función valor absoluto no tiene derivada en cero porque la derivada por derecha del 0 es distinta a la derivada por izquierda del 0.

NOTA: Una *aplicación o función lineal* es una función continua y no nula f: **R** → **R**, tal que es:

$$f(x' + x'') = f(x') + f(x'') \text{ para todo } x', x'' \in \mathbf{R}$$

DEFINICIÓN. (**Diferencial de una función**)

Para una función f diferenciable en x_0, la aplicación lineal de **R** *en* **R**

$$h \mapsto f'(x_0) \cdot h$$

se denomina ***diferencial de f en x_0*** *y se denota* df_{x_0}

Por definición, se tiene: df_{x_0} pertenece al conjunto de las funciones reales de variable real.

Como resultado de la unicidad de la derivada en x_0 y del teorema anterior se deduce que esta aplicación lineal es única en x_0.

La aplicación lineal df_{x_0} envía $h \in \mathbf{R}$ sobre $f'(x_0) \cdot h \in \mathbf{R}$. Además a esta imagen se la denota *dy,* de manera que

$$dy = f'(x_0) \cdot h.$$

Hay que remarcar que desde el punto de vista funcional: df_{x_0} pertenece al conjunto de las funciones reales de variable real, mientras que el número $dy \in \mathbf{R}$.

En el caso particular de la coincidencia $y = f(x) = x$, se tiene, para todo x_0, $f'(x_0) = 1$ y, por consiguiente, la aplicación lineal

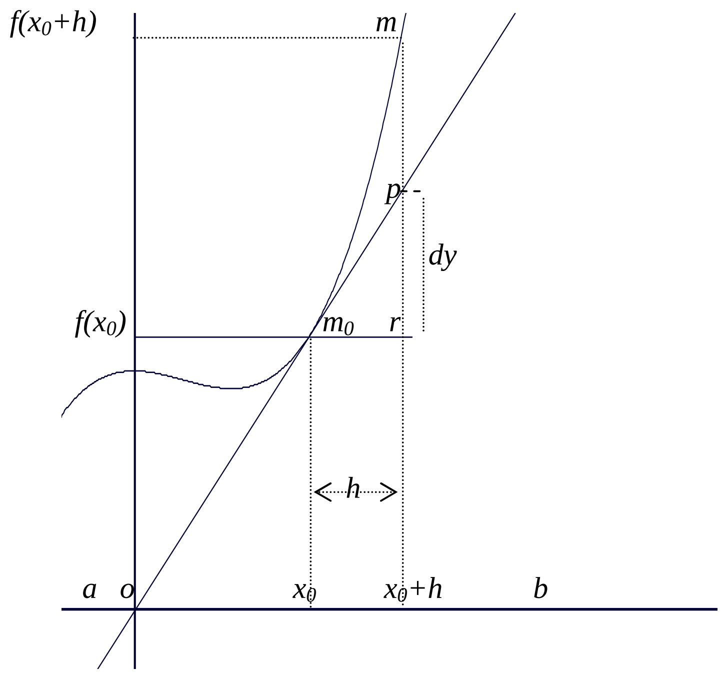
$$df_{x_0}: h \mapsto f'(x_0) \cdot h \quad \text{es la coincidencia} \quad h \mapsto h$$

En consecuencia, si en el caso general de una función $y = f(x)$ diferenciable en x_0 se denota *dy* la imagen de *h* por df_{x_0}, si f(x) = x entonces, sabiendo que su derivada es la función constante 1, se tiene que dy = 1. h, por consiguiente es natural denotar también dx a la variable h. Es decir la aplicación lineal df_{x_0} envía $dx \in \mathbf{R}$ sobre $dy \in \mathbf{R}$.

4.3.2. Interpretación geométrica

Sea Γ el grafo de $x \mapsto f(x)$ en un sistema ortonormal de ejes.

Se sabe que la tangente en el punto m_0 de abscisa x_0, tiene por pendiente $f'(x_0)$.



Si para un valor de h tal que $x_0 + h \in [a, b]$, los puntos correspondientes se toman m sobre el grafo de la función y p sobre la tangente, y recordando que,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \qquad \text{con} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

entonces:

$$\overrightarrow{pm} = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)$$

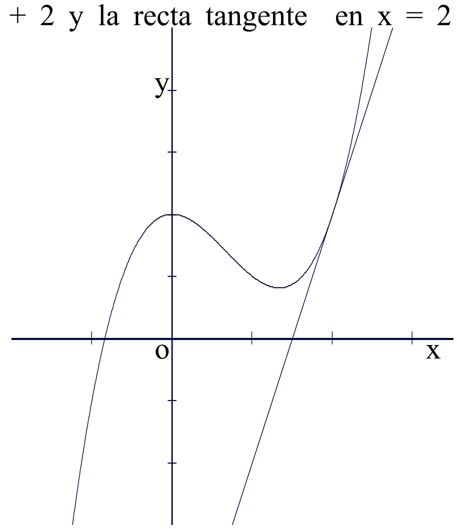
(se debe observar que la derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente es decir : $f'(x_0) = \frac{\overline{pr}}{h}$, entonces el término $df(x_0,h) = h\, f'(x_0) = pr$)

de donde:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{pm}}{h} = \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Se traduce diciendo que $\overrightarrow{pm}$ tiende hacia cero *más rápidamente* que h.

(La gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ y la recta tangente en $x = 2$ están dibujadas abajo, ¿qué pendiente tiene la recta?)



4.4. Cálculo de derivadas

4.4.1. Derivada sobre un intervalo

Sea *D* un intervalo incluído en **R**. Si *f* es una función de *D* en **R** derivable en cada punto de *D*, se dice que *f* es derivable sobre *D*. Si uno de los extremos pertenece a *D*, se supone que en ese punto la función tiene derivada lateral.

4.4.2. Proposición

- *Adición y productos*

Si las funciones $f: D \subset R \rightarrow R$ y $g: D \subset R \rightarrow R$, tienen derivada finita en el punto $x_0 \in D$, entonces las funciones $(f + g)$, $f - g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ son derivables en x_0.

Además se tiene:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

Basta aplicar la definición de derivada o diferenciabilidad en un punto.

4.4.3. Proposición

- *Cociente*

Si las funciones $f\colon D \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *y* $g\colon D \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, *tienen derivada finita en el punto* $x_0 \in D$, *entonces las funciones* $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ *son derivables en* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$.

Además se tiene:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

Por hipótesis g es derivable, es decir diferenciable en todo $x_0 \in D$. Para $x_0 + h \in D$, se tiene entonces

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = h[g'(x_0) + \varepsilon_1], \qquad \text{con} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1 = 0 .$$

Por consiguiente se puede escribir como $g(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in D$

$$\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{-[g(x_0+h) - g(x_0)]}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)} = \frac{-h[g'(x_0) + \varepsilon_1]}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}$$

(Sumando y restando $\frac{hg'(x_0)}{g^2(x_0)}$ a la expresión anterior, queda):

$$= h\left[-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} - \frac{g'(x_0) + \varepsilon_1}{g(x_0)g(x_0+h)}\right]$$

$$= h\left[-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} + \varepsilon(h)\right]$$

con

$$\varepsilon(h) = \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} - \frac{g'(x_0) + \varepsilon_1}{g(x_0)g(x_0+h)}$$

Se verifica inmediatamente que

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

En consecuencia:

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad \text{o también} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$$

CONSECUENCIA

Si $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ entonces usando la derivada de un producto se prueba que:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}}$$

4.4.4. Proposición

- ***Composición de funciones***

Se supone que la función $f:\ D \subset \mathbf{R} \ \rightarrow \ \mathbf{R}$, *tiene derivada finita en el punto* $x_0 \in D$; *y que la función* $g:\ E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, *con* $f(D) \subset E$, *tiene derivada finita en el punto* $y_0 = f(x_0) \in E$.

Entonces la función compuesta $g \circ f:\ D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ *es derivable en* x_0, *y su número derivado es:*

$$(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Además se tiene que: la diferencial de la compuesta coincide con la compuesta de sus diferenciales:

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \cdot df_{x_0}$$

Cómo f y g son derivables en x_0 y $y_0 = f(x_0)$ respectivamente, se tiene:

$$(1) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot [f'(x_0) + \varepsilon_1 (h)] \qquad con \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1 = 0$$

$$(2) \qquad g(y_0 + k) - g(y_0) = k \cdot [g'(y_0) + \varepsilon_2 (k)] \qquad con \qquad \lim_{k\to 0} \varepsilon_2 = 0$$

Elegimos

$$(3) \qquad k = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

entonces

$$y_0 + k = f(x_0 + h)$$

Sustituyendo en (2) $y_0 + k$ por $f(x_0 + h)$ y k *por* $f(x_0 + h) - f(x_0)$ y teniendo en cuenta (1) queda:

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot [g'(y_0) + \varepsilon_2 (k)]$$

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = h \cdot [f'(x_0) + \varepsilon_1 (h)] \cdot [g'(y_0) + \varepsilon_2(k)]$$

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = h \cdot [g'(y_0) \cdot f'(x_0) + f'(x_0) \cdot \varepsilon_2(k) + \varepsilon_1 (h) \cdot g'(y_0) + \varepsilon_1 (h) \cdot \varepsilon_2(k)]$$

es decir

$$g[f(x_0 + h)] - g[f(x_0)] = h \cdot [g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

o también: (4) $$g[f(x_0 + h)] = g[f(x_0)] + h \cdot g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0) + \varepsilon(h) \cdot h$$

con $$\varepsilon(h) = g'(f(x_0) \cdot \varepsilon_1(h) + f'(x_0) \cdot \varepsilon_2(k) + \varepsilon_1(h) \cdot \varepsilon_2(k)$$

Además se verifica que : $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Se puede observar en (4) que como $f'(x_0)$ es el valor de la derivada de f en el punto x_0 y que $g'(y_0)$ es el valor de la derivada de g en el punto correspondiente $y_0 = f(x_0)$, entonces este proceso implica que el número derivado de la compuesta g . f en el punto x_0 es

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)}$$

Y la derivada de la función compuesta tendrá que ser: ***D(f o g) = (Df o g) · Df***

4.4.5. Proposición

- *Derivada de la función inversa*

NOTA: Es conveniente repasar, en este punto, las definiciones y propiedades de la continuidad y monotonía.

En la derivación de la inversa de una función dada f intervienen tres cuestiones: la existencia de la función inversa f^{-1}, que se habrá de suponer; la existencia de su derivada, que en parte es consecuencia de la derivabilidad de f; y finalmente, la fórmula que da la derivada de la función inversa cuando se cumplen las condiciones anteriores.

Se supone que la función $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ *, continua en el intervalo D, biyectiva con inversa* f^{-1}*, diferenciable sobre D y* $0 \notin f(D)$*; tiene derivada finita en el punto* $x_0 \in D$*.*

Se puede probar además que f^{-1} *es diferenciable sobre f(D) y se tiene:*

La función derivada $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ *y su número derivado* $\left(f^{-1}_{(x_0)}\right)' = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}_{(x_0)}\right]}$

Prueba: Sabemos que $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x$; derivando y aplicando la regla de la cadena, tenemos que: $D(f \circ f^{-1})(x) = D(x)$, es decir:

$$[Df \circ f^{-1}](x) \cdot Df^{-1}(x) = Df[f^{-1}(x)] \cdot Df^{-1}(x) = 1$$

Despejando $Df^{-1}(x)$ tenemos que:

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df[f^{-1}(x)}$$

3.5. Monotonía, máximos y mínimos locales

Las definiciones referentes al crecimiento y decrecimiento locales, se pueden presentar en forma más adecuada al cálculo en el caso de funciones derivables.

3.5.1. Crecimiento y decrecimiento - DEFINICIONES:

La función $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, *es* ***creciente*** *en el punto* x_0, *cuando existe un entorno* $U(x_0) \subset D$, *tal que es*

1.a.- $(\forall x_0, x_0+h \in U(x_0)) \quad x_0 < x_0 + h \rightarrow f(x_0) \leq f(x_0+h)$

y

1.b.- $(\forall x_0, x_0+h \in U(x_0)) \quad x_0 + h < x_0 \rightarrow f(x_0+h) \leq f(x_0)$

de **1.a** resulta: $h > 0$ y $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$; y por consiguiente, tenemos:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \qquad \textit{para todo } x_0 \in U^*(x_0) \qquad (A)$$

de **1.b** resulta: $h < 0$ y $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$; y por consiguiente, el cociente incremental tendrá que ser positivo, igual que antes se tendrá:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \textit{para todo } x_0 \in U^*(x_0) \qquad (B)$$

Observación:

Las relaciones 1.a.- y 1.b.- prueban que para que la función sea creciente en x_0, el *cociente incremental deberá ser positivo*.

2.- *La función* f *es* ***decreciente*** *en* x_0, *cuando existe un entorno* $U(x_0) \subset D$, *tal que es:*

2.a.- $(\forall x_0, x_0+h \in U(x_0)) \qquad x_0 < x_0 + h \;\rightarrow\; f(x_0) \geq f(x_0+h)$

y

2.b.- $(\forall x_0, x_0+h \in U(x_0)) \qquad x_0 + h < x_0 \;\rightarrow\; f(x_0) \leq f(x_0+h)$

de **2.a** resulta: $h > 0$ y $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$; y por consiguiente, el cociente incremental tendrá que ser negativo.

de **2.b** resulta: $h < 0$ y $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$; y por consiguiente, el cociente incremental tendrá que ser negativo.

De manera que, de acuerdo a lo expuesto arriba, tendrá que ser :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \qquad \textit{para todo } x_0 \in U^*(x_0) \qquad (C)$$

Con $U^*(x_0)$ se ha designado el entorno perforado. Al suprimir el signo igual en las condiciones anteriores, se define el *crecimiento y decrecimiento estrictos*. Es evidente que, en el primer caso,

$h < 0$ *implica* $x_0 + h < x_0$ *implica que* $f(x_0 + h) < f(x_0)$

$h > 0$ *implica* $x_0 + h > x_0$ *implica que* $f(x_0 + h) > f(x_0)$

para $x_0 \in U(x_0)$, que son las condiciones de crecimiento local. Lo mismo se puede decir en el caso de decrecimiento.

4.5.2. Criterio de la derivada

Si a la expresión deducida en 1.a, identificada como (A), utilizamos el concepto de límite, tendremos una relación entre crecimiento de una función en un punto y la derivada en ese punto. Debemos notar que, en la expresión (A), el denominador h tendrá que ser estrictamente mayor que cero ($h \neq 0$), por consiguiente calcularemos la derivada por derecha del punto x_0. Es decir tenemos que:

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0;$$

dado que el cociente incremental es estrictamente positivo, tendrá que ser $f'(x_0^+) > 0$.
En cambio en la expresión (B), el denominador h tomamos estrictamente menor que cero, y calculamos entonces la derivada por izquierda del punto x_0, esto es:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0;$$

dado que cociente incremental es positivo para todo $h \neq 0$, será $f'(x_0^-) > 0$.

Por consiguiente como las derivadas por izquierda y por derecha son positivas tendrá que ser: $\underline{f'(x_0) > 0}$.

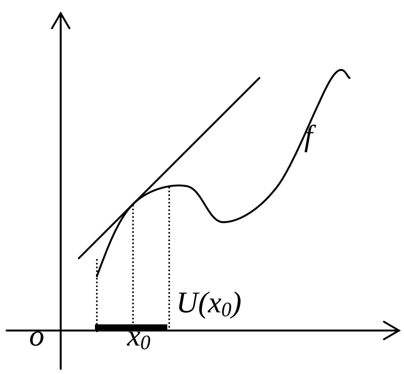
En el caso de la situación 2.- para funciones decrecientes el análisis se hace de la misma forma y se concluye, que tendrá que ser en ese caso $\underline{f'(x_0) < 0}$.

De lo expuesto, y de las gráficas de más abajo, se establecen los criterios que siguen, que permiten asegurar el crecimiento o decrecimiento locales de una función derivable.

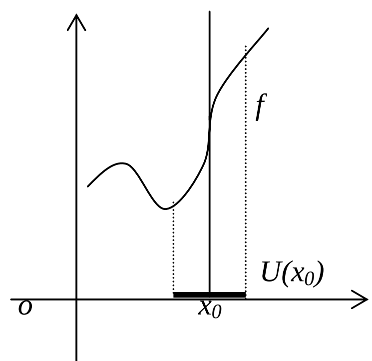
Sea la función $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, *con D abierto, derivable en el punto* $x_0 \in D$.

Si es $f'(x_0) > 0$ *o* $f'(x_0) = +\infty$, *la función es* ***estrictamente creciente en*** $\boldsymbol{x_0}$.

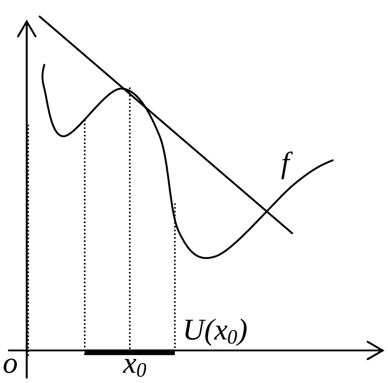
Si es $f'(x_0) < 0$ *o* $f'(x_0) = -\infty$, *la función es* ***estrictamente decreciente en*** $\boldsymbol{x_0}$.



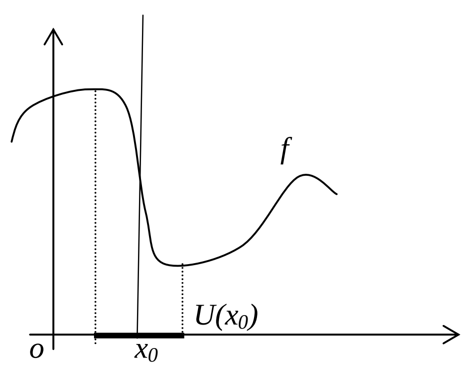
$f'(x_0)>0$, *f es en* x_0 *estric. creciente*



$f'(x_0) = +\infty$, *f es en* x_0 *estric. creciente*



$f'(x_0)<0$, *f es en* x_0 *estric. decreciente*



$f'(x_0) = -\infty$, *f es en* x_0 *estric decreciente*

Máximo Local y Mínimo Local

4.5.3. Definición

La función $f:\ D \subset \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, *tiene en el punto* x_0 *el* ***punto máximo local*** $(x_0,\ f(x_0))$, *si existe un entorno* $U(x_0) \subset$ *en D, tal que es*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{para todo} \quad x \in U(x_0).$$

La función f tiene en el punto x_0 el ***punto mínimo local*** $(x_0, f(x_0))$, si existe un entorno $U(x_0) \subset$ en D, tal que es

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{para todo} \quad x \in U(x_0).$$

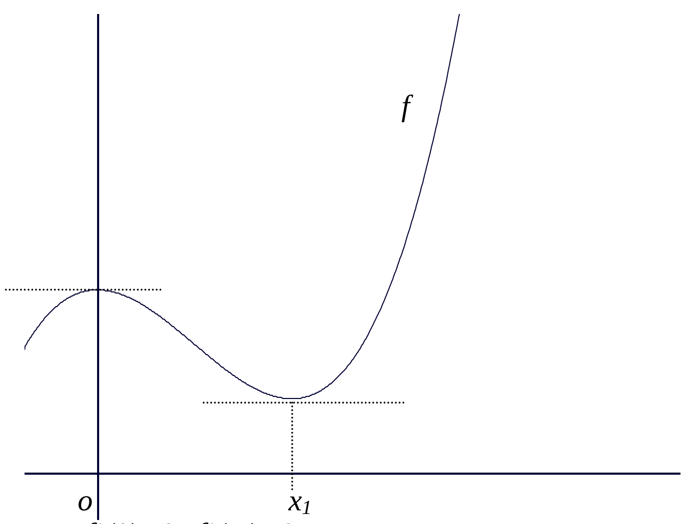
Los máximos y mínimos locales también se denominan *máximos y mínimos relativos*

Si se suprimen el signo igual en las desigualdades anteriores, se obtienen los máximos y mínimos estrictos locales.

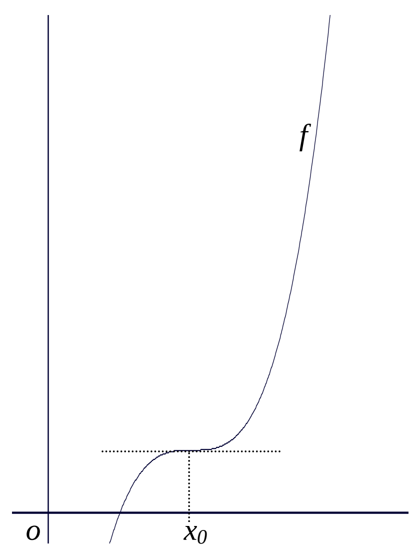
PROPOSICIÓN

Sea la función $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, con D abierto, derivable en el punto $x_0 \in D$. Si f tiene un máximo o un mínimo locales en x_0, es $f'(x_0) = 0$

Si fuera $f'(x_0) > 0$, f sería estrictamente creciente en x_0, y si fuera $f'(x_0) < 0$, f sería estrictamente decreciente en x_0.



$f'(0)=0,\ f'(x_1)=0,$
f(0) es un máximo local
$f(x_1)$ es un mínimo local



$f'(x_0)=0,$
$f(x_0)$ no es ni máximo ni mínimo local.

La condición f '(x_0) = *0* *es* ***necesaria*** *para la existencia del máximo o mínimo locales en* x_0 *, supuesta la existencia de la derivada,* ***pero no es suficiente.***

Ejemplos: -La función f(x) = x^3 es estrictamente monótona creciente en todo puntos, y la derivada f '(x) = $3x^2$ se anula para x = 0.

-La función f(x) = |x| tiene un mínimo relativo en x = 0 y evidentemente la derivada no se anula en ese punto, pues no existe. vw

4.5.4. Derivadas de las funciones elementales y circulares

Las derivadas de las funciones elementales, se pueden obtener a partir de la derivada de la exponencial, por medio de las reglas referentes a la derivación de las funciones compuestas y de las funciones inversas. Incluso la derivación de las exponenciales de base cualquiera se reduce a la de la exponencial de base e.

PROPOSICIÓN. *La derivada de la función dada por* e^x *es:*

$$\boxed{(e^x)' = e^x, \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R}.}$$

Según la definición de la derivada en x = a es

$$\left(e^a\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^a$$

Observando que: (recordar que son infinitésimos equivalentes)

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

y así resulta

$$(e^x)'_{x=a} = e^a.$$

Para un a cualquiera resulta la fórmula de la proposición.

PROPOSICIÓN. *La derivada de la función ln x es:*

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^+.}$$

Sea $y = \ln x$ con $x > 0$, o bien $x = e^y$. La regla de la derivación de la función inversa, $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, nos permite calcular la derivada del logaritmo natural, tomándola como la función inversa de la función exponencial, es decir: (haciendo un abuso en la notación: no se puede escribir $e^x \circ \ln x$, ya que la composición es una operación definida para funciones y no para números).

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^x \circ \ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Para un x > 0 cualquiera, resulta la fórmula de la proposición.

Cuando las funciones exponenciales y logarítmicas se refieren a una base cualquiera $a > 0$ y $a \neq 1$, se tiene

$$a^x = e^{\ln a^x} \quad \Rightarrow \quad a^x = e^{x \cdot \ln a} \qquad y \qquad \textit{además,}$$

$$\textit{de } \log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y\,; \quad \textit{se tiene: } \ln x = y \cdot \ln a \;\Rightarrow\; \ln x = \log_a x \cdot \ln a,$$

de donde:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

y se aplica la regla de derivación de la función compuesta:

PROPOSICIÓN. Las derivadas de las funciones a^x y $\log_a s$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, *son respectivamente:*

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

vw

PROPOSICIÓN. *La derivada de la función potencial x^s, con s real cualquiera es:*

$$\boxed{(x^s)' = s x^{s-1}} \qquad \textit{para todo } x \in \mathbf{R}^+.$$

Se puede escribir; $x^s = e^{s \cdot \ln x}$, y aplicando la regla de la derivación de la función compuesta, queda:

$$(x^s)' = e^{s \cdot \ln x} \cdot s \cdot \frac{1}{x} = x^s \cdot s \cdot \frac{1}{x} = s \cdot x^{s-1}.$$

Las derivadas de las funciones circulares directas se calculan según la definición, teniendo presente que es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1, \text{ son infinitésimos equivalentes.}$$

PROPOSICIÓN. *Las derivadas de las funciones coseno y seno son:*

$$\boxed{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \qquad (\operatorname{sen} x)' = \cos x,} \qquad \textit{para todo } x \in \mathbf{R}.$$

A partir de las fórmulas que dan la diferencias de cosenos y senos:

$$\cos x - \cos a = -2\,\mathrm{sen}\frac{x+a}{2}\,\mathrm{sen}\frac{x-a}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, a = 2\cos\frac{x+a}{2}\,\mathrm{sen}\frac{x-a}{2},$$ se tiene:

(Tomando en la definición de derivada $x_0 = a, \quad x = a + h, \quad h = x - a.$)

$$(\cos x)'_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{x-a} = -\lim_{x\to a}\mathrm{sen}\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\mathrm{sen}\, a$$

$$(\mathrm{sen}\, x)'_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, a}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a,$$

pues tanto el seno como el coseno son funciones continuas, y los últimos límites son iguales a 1.

PROPOSICIÓN. *Las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se pueden hallar aplicando la regla de la derivada de un cociente.*

Las derivadas de las funciones circulares inversas, resultan de la aplicación de la derivación de la función inversa.

Sin embargo, en los casos del coseno y seno se han de precisar los intervalos en los que se consideran las restricciones de estas funciones, a efectos de que existan las funciones inversas, pues los valores de sus derivadas difieren en el signo. En los casos de la tangente y cotangente no se presenta este problema.

Determinar la derivada de estas funciones inversas quedará como un posible ejercicio para el alumno.

TEST

1) Usando la definición de derivada, explique por que la función dada por $f(x) = |x - a|$, no tiene derivada en $x = a > 0$.

2) Dada una función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, derivable en todo $]a, b[$. i) ¿Tiene recta tangente en todos los puntos del intervalo $]a, b[$? ii) Si la pendiente de la recta tangente es mayor a cero $\forall x \in\ ]a, c[$, y menor a cero $\forall x \in\ ]c, b[$ y además en c la pendiente vale cero, que puede decir del punto $(c, f(c))$? iii) Dibuje la gráfica de una función que cumpla con cumpla con estas condiciones.

3) Dada la recta $(x, y) = (a, b) + t\cdot(1, \beta)$, explique cómo se determinan el punto (a, b) y el vector $(1, \beta)$, para que sea tangente a la gráfica de una función real de variable real dada por $y = f(x)$ en $x = a$.

4) Dada una función con $f'(x) > 0$ en cualquier parte de su dominio, fundamente para que valores de h se puede afirmar que el incremento $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$.

5) Demuestre que la función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, es diferenciable en cualquier punto $x_0 \in D_f$.

6) Si $f(x) = ax^3 + b$ y sabiendo que $f(1) = 7$ y que, en $x = 1$ la pendiente de la recta tangente es 6. Determine a y b.

7) Dada una función estrictamente creciente, biyectiva, continua, con la siguiente información, construya su gráfica: i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$; ii) $f(0) = -2$; iii) $f(\ln 3) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

8) Dada $f(x) = |x + 2|$. Determine: i) Los ceros de la función. ii) El intervalo de crecimiento estricto. iii) Represente gráficamente.

9) Dada la función por $f(x) = |x - b|$, con $b > 0$. Determine: a) Dominio e imagen de la función; b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; c) estudie la continuidad de la función y diferenciabilidad de la función; d) Calcule, máximos, mínimos, puntos de inflexión, si los tuviera; e) Determine la pendiente de la recta tangente en los puntos: i) $x = -2$; ii) $x = 2$. f) Haga la gráfica de la función.

10) Dada dos funciones f y g diferenciables en **R**. Demuestre que la función producto $f \cdot g$ también es diferenciable en **R** y que la derivada del producto es:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

<u>Bibliografía</u>:

Calculus. Apóstol.
Cálculo Infinitesimal de una Variable. De Burgos.
Calculus. Spivak.
El Cálculo. Leithold.
Mathématiques spéciales. Ramis- Deschamps- Odoux.

Parte II - GUÍA Nº2: *Derivada de funciones reales.*

Ejercicio Nº1. Determine $f'(x_o)$ usando la definición de derivada si:

a) $f(x) = x^2$ en $x_o = -2$ b) $f(x) = k\,x + b$ $(k, b \in \mathbf{R})$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_o = 2$

Ejercicio Nº2. Interpretación geométrica de la derivada.

1) Determine el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 + 8x + 10$, donde la tangente sea horizontal.

2) Obtenga la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado:

a) $y = x^2 - 3$; $x = 0$ b) $y = (x^2 + 2)^3$; $x = -1$ c) $y = \tan 3x$; $x = \pi/4$

Ejercicio Nº3. Encuentre (usando tablas de derivadas) las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x - 1$ c) $f(x) = \sqrt{x-3}$ d) $f(x) = (2x-4)^n$

e) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{5}} - 4$ f) $f(x) = 3^3 + x^{-4}$ g) $f(x) = \sqrt{4}\; x^5 - \sqrt{4}$

Ejercicio Nº4. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x$ b) $5 \operatorname{sen} x + \sqrt{x}$ c) $f(x) = -\frac{2}{8}\cos x$ d) $f(x) = \tan x$

e) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{3}{2}$ f) $f(x) = -\sec x + 2\cos x$ g) $f(x) = \operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi$

Ejercicio Nº5. Derivar las siguientes funciones:

a) $2x^3 \cdot \operatorname{sen} x$ b) $\tan x \cdot \sec x$ c) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ d) $\frac{x^2}{2}(x+1)^3$ e) $\frac{-x}{x^2+1}$

f) $\operatorname{sen} x \cdot \sqrt{x}$ g) $\frac{10}{x}$ h) $\frac{3x^4 - x^2 + 5x + \pi}{7}$ i) $\frac{3x^2+1}{(x+2)^2}$

Ejercicio Nº6. Derivar las siguientes funciones (tenga en cuneta la regla de la cadena).

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x+2)$ b) $f(x) = \cos(2x)$ c) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$ d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

e) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^5$ f) $f(x) = \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^3$ g) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(2x+3)}$ h) $f(x) = \cos^2(2x)$

Ejercicio Nº7. Sabiendo que $Df^{-1} = \dfrac{1}{Df \circ f^{-1}}$, encuentre las derivadas de arc sen, tan, y ln.

Ejercicio Nº8. Derive las siguientes funciones:
a) $f(x) = \text{arc tg}\,(x^2 - 1)$ b) $f(x) = \text{arc sen}\,(5x^2)$ c) $f(x) = \text{arc cos}\,(\sqrt{x} - 2)$

Ejercicio Nº9. Derivar las siguientes funciones (recordar regla de la cadena).
a) $y = \frac{1}{2}\ln x^2$ b) $y = (\ln x)^3$ c) $f(x) = x^3 + \ln(1 + x^2)$ d) $y = \frac{1}{\ln(x^2+1)^3}$
e) $y = \ln(\text{sen}(\sqrt{x}))$ f) $y = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ g) $f(x) = \ln^2(3x^4)$ h) $y = -3\ln(x-5)^2$

Ejercicio Nº10. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^x$ b) $f(x) = x^{x+1}$ c) $f(x) = x^{\ln x}$ d) $f(x) = a^{x^3+3}$ e) $y = 5^{x^2}$

Ejercicio Nº11. Derivar las siguientes funciones:
a) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}$ c) $y = e^{\ln x}$ d) $f(x) = -\frac{2x}{e^x}$ e) $y = e^{\sqrt{5}} \cdot \text{sen}2x$
f) $f(x) = e^{\sqrt{x+2}} \cdot (2 - x)$ g) $y = (3 + \ln x^3) \cdot e^{-2x}$ h) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$

Ejercicio Nº12. Decir si las siguientes funciones son **diferenciables** en $x = x_o$:

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 - x$ c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Ejercicio Nº13. Si f(x)) = $x^2 + x$, halle la diferencial de f:
a) en $x = 1$ y para $h = 1$ b) en $x = 1$ y para $h = 2$ c) en $x = 2$ y para $h = 1$ y represente geométricamente.

Ejercicio Nº14. (Derivadas sucesivas). Encuentre la primera y segunda derivadas de las siguientes funciones:
a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{5}x^2 + x + 2$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

Ejercicio Nº15. (Derivación implícita). Hallar las derivadas de las funciones definidas implícitamente:

a) $x^2 + 3xy - 4 = 0$ b) $x^3 + y^3 = a^3$ c) $x^2 - y^2 = 3$ d) $x^2y + xy^2 + 12 = \pi$

Aplicaciones de la derivada

5. Aplicaciones de la derivada

5.1. Introducción

INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA

1.- *Interpretación geométrica*. La derivada de una función se introdujo como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Obviamente, esto se puede considerar como una interpretación de naturaleza geométrica del concepto de derivada.

2.- *Variación de una magnitud.* Algunas magnitudes escalares, como por ejemplo: la temperatura de un cuerpo expuesto a una llama, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento rectilíneo al aplicar una fuerza, varían con respecto a otras magnitudes escalares, por ejemplo, con el tiempo. Al tratar el estudio de la variación de la dichas magnitudes (temperatura, velocidad, aceleración, respecto a otra (tiempo), aparece ineludiblemente el concepto de derivada.

La derivada se puede interpretar como la razón instantáneas de variación de una magnitud escalar respecto a otra.

Sea y una magnitud escalar que depende de otra magnitud escalar x, descripta mediante la expresión de una función de la forma:

$$x \rightarrow \quad y = f(x)$$

Se define razón instantánea de variación de magnitud y respecto a x en x_0 al valor del límite siguiente:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ahora bien;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Cuestionario

El siguiente cuestionario deberá servir como un repaso de los conceptos ya estudiados, necesarios para continuar con el desarrollo del presente tema.

1.- Una función continua posee recta tangente en todos sus puntos. ¿Es derivable la función en todos ellos?

2.- ¿La recta tangente a la gráfica de una función debe dejar dicha gráfica a un lado de la recta?

3.- ¿Cuál es la recta tangente de una función constante?; ¿y de una lineal?

4.- ¿Es derivable una función con derivadas laterales iguales, en un punto?

5.- ¿Es derivable una función continua con derivadas laterales en un punto?

6.- ¿Una función continua, creciente y que posee recta tangente en un punto es derivable en ese punto?

7.- La derivada de una función se anula en un punto: ¿existe máximo o mínimo en ese punto?

8.- Una función es derivable en]a, b[y f(a) = f(b). ¿posee máximo o mínimo dicha función?

9.- Sea f derivable y a, b, c tres puntos de su dominio tales que a < b < c, f(a) = f(c) y f ’(b) = 0. ¿ Se puede asegurar que f alcanza un valor máximo o mínimo relativo en el punto b?

Comentario

El conocimiento de la derivada de una función en un punto, informa sobre su variación en un entorno del punto, y también el teorema clásico del incremento finito se refiere a la variación de la función en un intervalo. Sin embargo hay una diferencia esencial; en el primer caso la “magnitud” del entorno es desconocida, mientras que en el segundo el intervalo está fijado de antemano, es decir, se trata de un teorema global.

Este teorema, así como sus generalizaciones, se basan en el *teorema de Rolle*, que a su vez traduce a las funciones derivables la propiedad de las funciones continuas, en la que se asegura la existencia de máximo y mínimo cuando están definidas en un intervalo real compacto.

Desde el punto de vista geométrico, tanto en el teorema de Rolle como en el incremento finito, se asegura la existencia de una tangente paralela a la cuerda que une los extremos de un arco de curva de una función continua. En el caso considerado por Cauchy la curva está definida en forma paramétrica.

La fórmula de Cauchy permite demostrar la regla de l'Hôpital, una de las más prácticas del Cálculo tiene un gran atractivo, por presentarse como un método sistemático para el cálculo de los llamados límites indeterminados, y por la sencillez de su formulación.

Por otra parte, la regla en su versión más sencilla tiene un claro sentido geométrico. Si dos curvas pasan por el mismo punto $x = x_0$, del eje de abscisas, para hallar el límite de la razón de ordenadas, se sustituyen las curvas por sus tangentes en el punto, y el límite es el cociente de las pendientes.

Otros casos de indeterminación, por una manipulación adecuada se pueden reducir al caso del cociente, típico en la regla de l'Hôpital.

Una generalización de la fórmula del valor medio de Cauchy, requiere la introducción de las derivadas sucesivas.

Las derivadas de los órdenes sucesivos constituyen el instrumento idóneo para pasar de las aproximaciones de primer orden a de una función, en el entorno de un punto, a otras de orden superior.

5.2. Teorema de Rolle y de los Incrementos finitos

5.2.1. Teorema de Rolle

Tanto la definición de derivada, como las propiedades expuestas hasta aquí son de carácter local, pues se refieren a un entorno de un punto que no puede fijarse previamente. Más importante son las propiedades globales, que se refieren a un conjunto inicialmente fijado. Entre estas, las más notables referentes a la derivación son el teorema de Rolle y sus consecuencias.

Teorema.

Sea la función $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$, y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x_0 en $]a, b[$, tal que $f'(x_0) = 0$.

Consideremos una función f continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable sobre el intervalo abierto $]a, b[$.

Si f es constante sobre $[a, b]$, entonces $f' = 0$ sobre $]a, b[$. Supongamos, pues, f no constante; entonces en el conjunto imagen de la función, deberán existir números distintos a $f(a) = f(b)$; por ejemplo números superiores a $f(a)$. Consideremos entonces a m como ese número, que será el supremo del conjunto imagen de la función f, que es continua sobre el intervalo $[a, b]$: existe un x_0 e n $]a, b[$ tal que $f(x_0) = m$. Como $m > f(a)$, se tiene $x_0 \in]a, b[$.

Sea entonces $h \neq 0$ tal que $x_0 + h \in]a, b[$. De la definición de extremo superior de un intervalo real, se tiene que $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Por lo tanto:

$$h > 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$h < 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

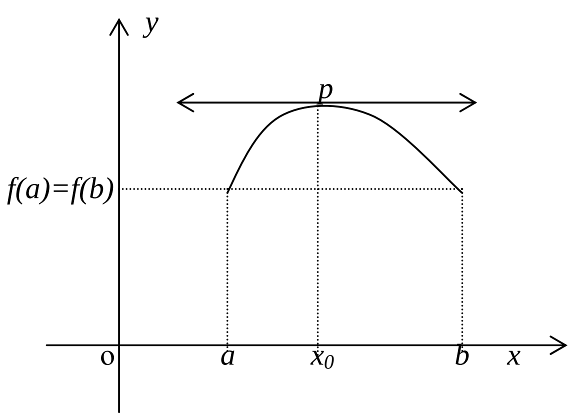
De donde, de la definición de derivada por derecha y por izquierda en el punto x_0, se tendrá:

$$f'(x_0^+) \leq 0 \qquad y \qquad f'(x_0^-) \geq 0.$$

Como por hipótesis, f es derivable en $]a, b[$, existe $f'(x_0)$ y deberá ser $f'(x_0)=0$. y fin.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Para un función que cumpla con las condiciones del Teorema de Rolle, existe un punto p de la gráfica donde la tangente es paralela al eje ox.



5.2.2. Teorema de los incrementos finitos

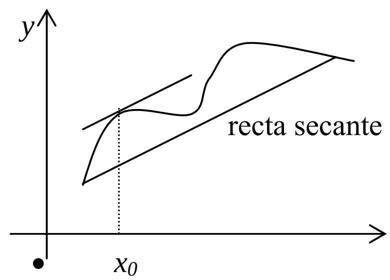
Al conocer el valor de una función derivable en un punto, se tiene información acerca de la variación de la función en un entorno de dicho punto. Los resultados que se exponen en este apartado se refieren a la variación de la función en un intervalo cerrado.

Inicialmente, nos planteamos la siguiente cuestión geométrica. Si se considera una función derivable y una recta secante a la gráfica de la función en dos puntos de contacto. ¿Existe un punto de la gráfica de la función, comprendido entre los dos anteriores, tal que la recta tangente en ese punto es paralela a esa recta secante? La contestación a esta cuestión se obtiene a partir del siguiente resultado.

Teorema del incremento finito

Sea la función f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$, entonces existe un número x_0 en $]a, b[$, tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)\cdot f'(x_0).$$



Se considera la función auxiliar:

$$g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$$
$$x \to \quad g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \right)$$

La función g es continua en $[a, b]$ por ser suma de funciones continuas, y derivable en $]a, b[$ por análoga razón. Además,

$$g(a) = 0 = g(b)$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle. Existe un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$. Así pues,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0) = 0 \quad \to \quad f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \quad \to \quad f'(x_0)\cdot(b - a) = f(b) - f(a)$$

<u>*Teorema generalizado del valor medio.*</u>

Sean $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables sobre $]a, b[$. Entonces existe un número x_0 en $]a, b[$, tal que:

$$f'(x_0) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(x_0) \cdot [f(b) - f(a)]$$

Se considera la función auxiliar:

$$F : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \to \quad F(x) = f(x)\cdot[g(b) - g(a)] - g(x)\cdot[f(b) - f(a)]$$

La función $F(x)$ es continua en $[a, b]$, y derivable en $]a, b[$, por ser suma de funciones continuas en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Además, cumple que

$$F(a) = f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a) = F(b)$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle. Existe un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $F(x_0) = 0$. Así pues,

$$F'(x) = f'(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(x) \cdot [f(b) - f(a)]$$

$$f'(x_0) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(x_0) \cdot [f(b) - f(a)] = 0$$

Fórmula del valor medio de Cauchy

La igualdad del enunciado del teorema anterior suele ser expresada mediante fracciones, supuestas ciertas condiciones. La igualdad expresada en forma fraccional es conocida como fórmula del valor medio de Cauchy.

Para asegurar que la expresión fraccional tenga sentido han de realizarse hipótesis adicionales. Por ejemplo.

1- Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ *y* $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ *dos funciones continuas en* $[a, b]$ *y derivables sobre* $]a, b[$ *y a demás* g' *no se anula en* $]a, b[$. *Entonces existe un punto* x_0 *en* $]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2- Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ *y* $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ *dos funciones continuas en* $[a, b]$ *y derivables sobre* $]a, b[$ *y a demás* $g(b) \neq g(a)$ *y las funciones* f' *y* g' *no se anulan simultáneamente en* $]a, b[$. *Entonces existe un punto* x_0 *en* $]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

5.2.3. Caracterización de una función constante

Para que una función derivable sobre un intervalo cerrado sea constante, es necesario y suficiente que se derivada sea nula

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Si f es constante, se sabe que $f' = 0$. Recíprocamente, si f' es la aplicación nula sobre $[a, b]$, entonces, en virtud del teorema de los incrementos finitos, existe, cualquiera que sea x de $[a, b]$ un $x_0 \in]a, x[$ tal que:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(x_0)$$

La hipótesis $f'(x_0)$ implica que $f(x) = f(a)$; es decir, la función f es constante.

Finalmente entonces, si dos funciones f y g, derivables sobre un intervalo, tienen derivadas iguales sobre ese intervalo, f – g es una constante de acuerdo con la expresión anterior.

5.3. Aplicación de la derivada al cálculo de límites

La fórmula del valor medio de Cauchy permite demostrar la regla de l'Hôpital, de aplicación frecuente en el cálculo de límites que se presenten en forma indeterminada.

Sean $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, dos funciones con derivadas finitas en cada $x_0 \in]a, b[$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, y además $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$. Entonces si es

$$\lim_{x \to x_0} f = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g = 0,$$

y existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'} = A,$$

también existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}, \quad \text{y} \quad \text{es} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = A$$

donde A puede ser finito o infinito. (Regla de l'Hôpital.).

1. <u>*Teorema de la regla de l'Hôpital. Caso*</u> : $\dfrac{0}{0}$

Sean $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, dos funciones derivables en $]a, b[$ y tal que g' no se anula en $]a, b[$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, y existe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y además,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.-*Teorema de la regla de l'Hôpital. Caso* : $\frac{\infty}{\infty}$

Sean f: [a, b] → **R** *y g: [a, b] →* **R,** *dos funciones derivables en]a, b[- {c} y tal que g' no se anula en]a, b[.*

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, y existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y además,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para ver la demostración de estos teoremas ver: Principios de Análisis Matemático, de E. Linés; o Cálculo 1, de Apóstol .

NOTA: La regla de l'Hôpital es aplicable tanto si los límites son finitos como si no, tanto si se tiende a un punto como si se tiende al infinito.

La reducción de las indeterminaciones $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 0^0; ∞^0; y 1^∞; se explicarán en las clases prácticas, cuando se presenten.

5.4. Asíntotas (Oblicuas y/o horizontales)

En la construcción de gráficos de funciones, muchas veces es de gran utilidad saber si una función tiene o no tiene asíntota, esto nos permite saber con certeza el comportamiento de la función para valores muy grandes (resp. muy chicos) de la variable independiente x.

DEFINICIÓN.

Sea la función f : **R** → **R,** con x → f(x); y la línea recta con ecuación $y = k\cdot x + b$; es decir una recta con pendiente k y ordenada al origen b, cuya ecuación vectorial lo podemos escribir entonces como: $(x, y) = (0, b) + t(1, k)$ con $t\in\mathbf{R}$.

Decimos que la recta y = kx + b es una asíntota a la gráfica de la función si y solamente si:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - y\right] = 0}$$

Es decir:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(k\cdot x+b)\right]=0}$$

A partir de esta definición se puede, aplicando las propiedades de límite, determinar, conocida f(x), la pendiente k y la ordenada al origen b, es decir la ecuación de la recta.

Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(k\cdot x+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x-b\right]=\lim_{x\to\infty} f(x)-k\cdot\lim_{x\to\infty} x-\lim_{x\to\infty} b=0 \qquad (1)$$

o sea dividiendo por x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=$$

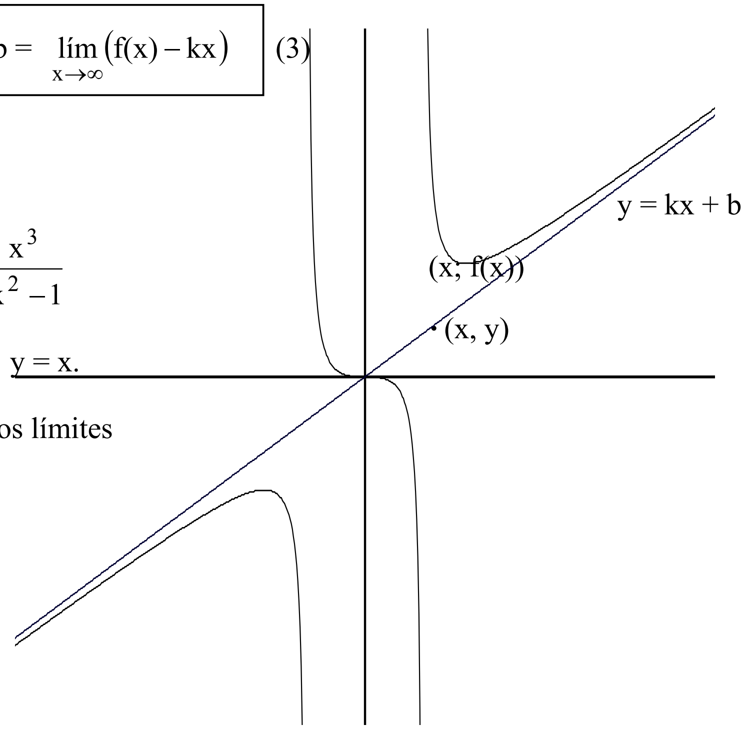
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k\cdot 1-0=0$$

De ésta última expresión despejamos k, y obtendremos una fórmula para calcular k.

$$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot f(x)\right)} \qquad (2)$$

Ahora bien, a partir de la expresión (1), y ya con k calculada, podemos despejar b, ya que el $\lim_{x\to\infty} b=b$, es decir:

$$\boxed{b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)} \qquad (3)$$



Ejemplo:

La función dada por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Tiene por asíntota a la recta $y=x$.

Solamente se debe calcular los límites

(2) y luego el (3)

5.5. Convexidad y concavidad de una función

El comportamiento de una función en el entorno de un punto, es decir, el estudio local de la función, se puede sistematizar por medio de las aproximaciones polinómicas. Aparte de la continuidad, las características locales más notables son: la monotonía, la convexidad o concavidad y en su caso la inflexión.

La convexidad, así como la monotonía, es de naturaleza global, pero a partir de ella se pasa a la convexidad en un punto. La inflexión es un concepto local.

Definición.

*Sea $f: I \rightarrow$ **R** una función en la que I es un intervalo.*
Se dice que f es convexa (abierta hacia arriba) en el intervalo I, si para cada tres puntos a, x, b del intervalo I, con $a < x < b$, se tiene:

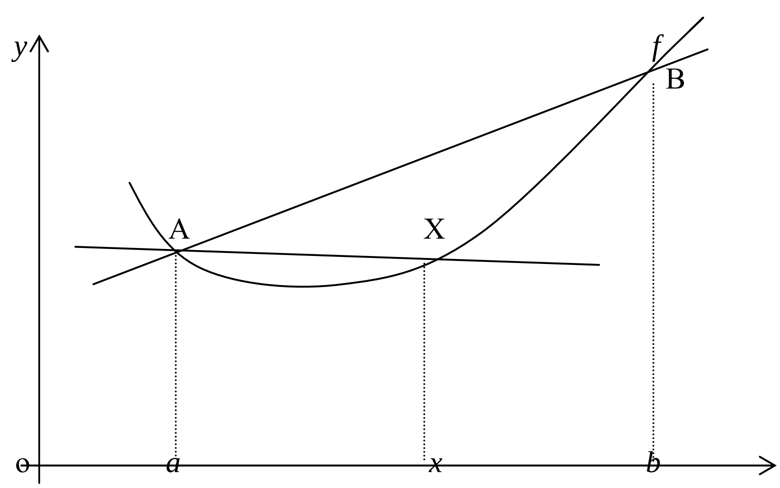
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta definición tiene un claro sentido geométrico:

La función f es convexa en I, si para cada tres a, x, b $\in$ I, el punto (x, f(x)) de la gráfica cartesiana de la función, está situada debajo de la secante que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) de la misma gráfica.

Efectivamente, la ecuación de la secante que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)), es

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$



Función convexa.(abierta hacia arriba)

Si *$a < x < b$, el punto* X *está debajo de la secante* AB

y si el punto (x, f(x)) ha de estar situado debajo de esta recta, se deberá tener

$$f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

o sea

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

OBSERVACIÓN

En la definición se ha elegido como condición de convexidad el que la pendiente de la recta secante AB sea mayor que el de la AX.

Aunque aparentemente, en la definición de convexidad, el punto a juega distinto papel que el b, la misma construcción geométrica muestra que dichos puntos intervienen en forma análoga, lo que se comprueba en la siguiente proposición.

La función f es convexa en I, si para cada tres puntos: $a, x, b \in I$, $a < x < b$, se tiene

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

Demostración.

Bastará deducir la última desigualdad de la primera.

De la primera resulta

$$[f(x) - f(a)]\cdot(b - a) - [f(b) - f(a)]\cdot(x - a) < 0$$

y poniendo $(x - a = (b - a) - (b - x)$, queda

$$[f(x) - f(b)] \cdot (b - a) + [f(b) - f(a)]\cdot(b - x) < 0$$

que equivale a la segunda desigualdad.

En la definición de convexidad no se ha supuesto la continuidad de la función que es consecuencia de ella.

<u>*Proposición*</u>

Una función f de I en **R** *convexa en I, es continua en este intervalo.*

La acotación del cociente: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tanto para $x < a$ como para $x > a$, implica la continuidad de f en $x = a$.

OBSERVACIÓN.

Si en la definición de función convexa, se cambia el signo de la desigualdad, es decir, se supone que *para cada tres puntos $a, x, b \in I$*, con $a < x < b$, se verifica:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

se obtiene la definición de *función cóncava (abierta hacia abajo).* En este caso, el punto (x, f(x)) de la gráfica cartesiana está situado encima de la secante que une los puntos *(a, f(a)) y (b, f(b)).*

Si f es una función convexa en I, $-f$ es una función cóncava, e inversamente. Bastará, pues estudiar las propiedades de las funciones convexas, ya que las cóncavas, de deducen de forma inmediata.

5.6. Deriv. sucesivas y teor. del valor medio generalizado

En la definición de las derivadas sucesivas de una función, para evitar los inconvenientes que originan la consideración de las derivadas laterales se supondrán abiertos los dominios de definición.

Definición.

Dada la función $f: D\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *con* D *abierto, si* f *tiene derivada en cada punto* $x\in D$ *queda definida la derivada primera* $f': D\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. *Si esta función* f' *es finita y tiene derivada en cada punto* $x\in D$, *se obtiene la función:*

$$f'' = (f')': D\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

que es la "derivada segunda" de f.

Por recurrencia se define la derivada n-ésima de f.

Definición.

Dada la función $f:D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *con* D *abierto, si existe y es finita* $f^{(n-1)}: D\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *y esta función tiene derivada finita o infinita en cada punto* $x\in D_0 \subset D$; *la función derivada n-ésima* $f^{(n)}: D_0 \to \mathbf{R}$, *es aquella en la que a cada* $x\in D_0$, *le corresponde* $(f^{(n-1)})'(x)$.

En forma breve se escribe

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})': \quad D \to \mathbf{R},$$

pero, se ha de advertir, que no se requiere que sea finita la derivada de $f^{(n-1)}$, y además que si D_0 es un intervalo, tal como $[a, b[$; se considera como derivada n-ésima de f en a la lateral $(f^{(n-1)})'(a^+)$.

Generalización.

Sean $f:]a_0, b] \to \mathbf{R}$ y $g:]a_0,b] \to \mathbf{R}$, y un $a \in]a_0, b[$. Se suponen las funciones f y g continuas en $[a, b]$, $n - 1$ veces derivables en $]a_0, b[$ y con derivadas n-ésimas en $[a, b[$. Además se suponen los $n – 1$ igualdades siguientes:

$$f^{(k)}(a)\,[g(b) - g(a)] = g^{(k)}(a)\,[f(b) - f(a)], \text{ con } k = 1, 2, ..., n - 1.$$

Entonces existe al menos un punto $\xi \in]a, b[$ en el que es

$$f^{(n)}(\xi)\,[g(b) - g(a)] = g^{(n)}(\xi)\,[f(b) - f(a)].$$

Fórmula generalizada del incremento finito.

Sean $f:]a_0, b] \to \mathbf{R}$, y un $a \in]a_0, b[$. Se supone que f es continua en $[a, b]$, $n – 1$ veces derivable en $]a_0, b[$ y con derivada n-ésima en $[a. b[$. Además se suponen las $n – 1$ condiciones siguientes:

$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Entonces existe al menos un punto $\xi \in]a, b[$ en el que es

$$f(b) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

También se puede obtener una generalización de la fórmula del valor medio de Cauchy.

5.7. Aproximación local de una función en un punto

Conocer la variación de una función en un intervalo, aun cuando la expresión de dicha función es sencilla, puede plantear gran dificultad. En este caso se intenta encontrar una función, mejor conocida o estudiada por nosotros, tal que en un entorno de un punto dado, las gráficas de las dos funciones sean muy próximas.

Debe notarse, pues, que se trata de sustituir una función por otra puntualmente, por tanto se plantean dos cuestiones principales.

- ¿Qué función sustituye a la función que se estudia?, es decir, ¿qué tipo de funciones son las funciones aproximadoras?
- Qué criterio mide la bondad de la aproximación?

Una teoría de aproximación de funciones consiste esencialmente en contestar a las anteriores cuestiones. en este apartado se procede a tratar aproximaciones polinómicas con criterios de aproximación potencial, es decir, las funciones elegidas como aproximaciones son funciones polinómicas.

5.8. Fórmula de Taylor y de Mac-Laurin

Vamos a generalizar el teorema de los incrementos finitos, con el fin de sustituir, en determinadas condiciones una función por un polinomio.

Sea $f:]a, b[\to \mathbf{R}$ *una función* n *derivable en* $]a, b]$ *y con derivada de orden* $n + 1$ *en* $]a, b[$.

Entonces existe un $x_0 \in]a, b[$ *tal que:*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Esta igualdad se denomina *fórmula de Taylor.*

Para la demostración, el alumno la deberá consultar la extensa bibliografía que existe al respecto.

Fórmula de Maclaurin.

En la fórmula de Taylor hacemos:

$$h = b - a \quad y \quad c = a + \theta h$$

y se obtiene

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h). \qquad (1)$$

Esta igualdad nos dice que, en el entorno de $h = 0$, la aplicación $h \to f(a+\theta h)$ puede reemplazarse de modo aproximado por el polinomio hasta el grado n, el término complementario se llama resto de Taylor.

Si en la relación (1), se reemplaza a por 0, se obtiene:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h).$$

Esta última igualdad se denomina *fórmula de Mac-Laurin.*

5.8.1. Convexidad y Concavidad

Teorema de caracterización

Sea *f: D*$\subset$**R**$\rightarrow$ **R**, *una función derivable en su dominio D, y a un punto de D*

* La función *f* es convexa en el punto *a* si y sólo si *f''* es estrictamente creciente en *a*.

* La función *f* es cóncava en el punto *a* si y sólo si *f''* es estrictamente decreciente en *a*.

Condición suficiente

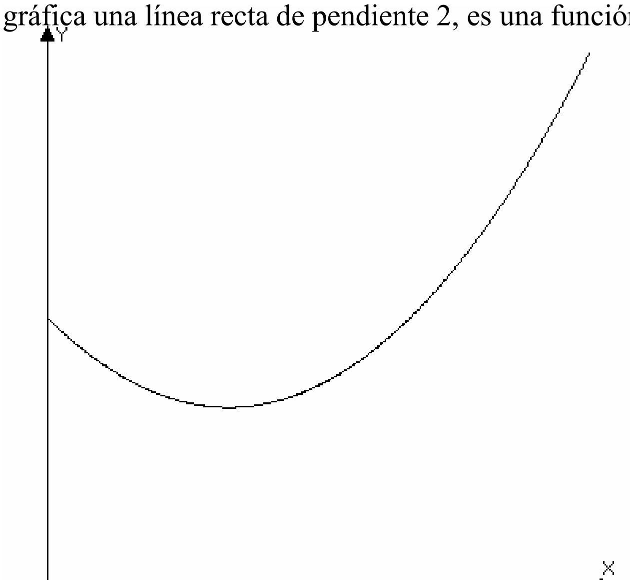
Sea *f:D*$\subset$**R**$\rightarrow$**R**, *una función derivable dos veces en su dominio D, y a un punto de D.*

* La función *f* es convexa en el punto *a* si y sólo si *f''(a) > 0.*

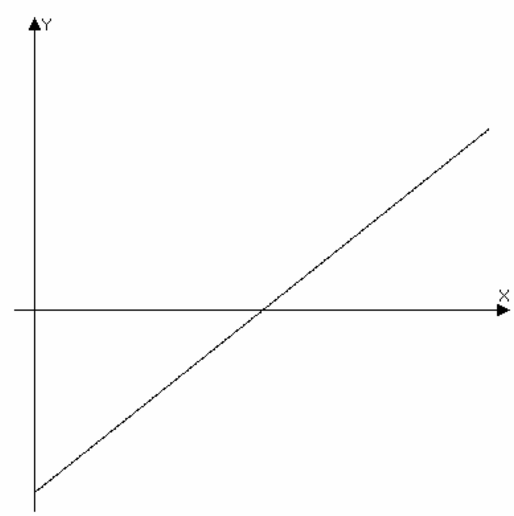
* La función *f* es cóncava en el punto *a* si y sólo si *f''(a) < 0.*

Observación:

1.- Dada una función $\begin{pmatrix} f:]a,b[\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$, continua, derivable al menos dos veces y convexa (abierta hacia arriba), la función derivada $\begin{pmatrix} f':]a,b[\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{pmatrix}$ será una función creciente. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ definida sobre el intervalo]0, 4[es una trozo de parábola abierta hacia arriba, continua y derivable en todo su dominio, su derivada $f'(x) = 2x - 4$ tiene por gráfica una línea recta de pendiente 2, es una función creciente (ver las gráficas).



Gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 6$



Gráfica de $f'(x) = 2x - 4$

Como la función derivada es una función creciente y derivable en todo el dominio]a, b[, su derivada, es decir $(f')' = f''$, tendrá que ser estrictamente positiva en todo su dominio. Es decir: $\forall\, x \in\,]a, b[,\ f''(x) > 0$.

En consecuencia: *si f es una función convexa (abierta hacia arriba) en]a, b[la derivada segunda de f será estrictamente positiva*.

2.- El mismo estudio nos lleva a decir que *si f es una función cóncava (abierta hacia abajo) en]a, b[la derivada segunda de f será estrictamente negativa*.

Es decir: $\forall\, x \in\,]a, b[,\ f''(x) < 0$.

5.8.1.1. Teorema (punto de inflexión)

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una función tres veces derivable en un punto $a \in D$. Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Que la segunda derivada se anule y la tercera derivada no, son condiciones suficientes pero no necesarias.

Por lo tanto, en un punto de inflexión: $x = a$, la función no es cóncava y tampoco convexa. Además en ese punto la f cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava, según el signo de la tercera derivada.

Se debe observar que la función dada por $f(x) = x^5$ posee punto de inflexión en $x = 0$; sin embargo, tenemos que: $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 0$. Entonces con esta función el resultado recíproco no es cierto.

5.8.1.2. Teorema (condición suficiente). Funciones n-derivables

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una función n veces derivable y a un punto del dominio tal que:

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2k-1)}(a) = 0 \quad \text{con } 2k < n \quad \text{y} \quad f^{(2k)}(a) \neq 0$$

**La función f es convexa en el punto a si y sólo si $f^{(2k)}(a) > 0$.*

**La función f es cóncava en el punto a si y sólo si $f^{(2k)}(a) < 0$.*

Teorema

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una función n-veces derivable, y a un punto del dominio tal que

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2k)}(a) = 0 \quad \text{con } 2k < n$$

Si $f^{(2k+1)}(a)\,) \neq 0$, *entonces* f *posee un punto de inflexión en* $x = a$.

5.9. Máximos y mínimos locales de funciones varias veces derivables

Ya vimos antes los conceptos de máximo y mínimo local de una función y presentados las condiciones necesarias para la existencia de máximo y mínimo local. En este lugar se establecen las condiciones suficientes para asegurar la existencia de máximo o mínimo local para funciones varias veces derivables.

Cabe observar que si una función es derivable, y en un punto $x = a$ posee un máximo relativo, entonces la recta tangente está por encima de la gráfica de la función en un entorno del punto. Es decir, la función es cóncava en un punto máximo local.

Algo análogo sucede en los mínimos locales de una función derivable; se tiene que en un mínimo local la función es convexa. Esto permite establecer una caracterización de los puntos máximos y mínimos locales.

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *una función derivable en su dominio, y* a *un punto de D.*

* f *tiene un* *máximo local* *en* $x = a$, *si y sólo si* $f'(a) = 0$ *y* f *es cóncava en* $x = a$

* f *tiene un* *mínimo local* *en* $x = a$, *si y sólo si* $f'(a) = 0$ *y* f *es convexa en* $x = a$.

Los siguientes resultados muestran condiciones suficientes para la existencia de máximo y mínimo local utilizando condiciones que aseguran la concavidad y convexidad.

5.9.1. Teorema (condiciones suficientes)

Sea $f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *una función dos veces derivable en un punto* a *del dominio.*

* *Si* $f'(a) = 0$ *y* $f''(a) < 0$, *entonces* f *tiene un* *máximo local en* $x = a$.

* *Si* $f'(a) = 0$ *y* $f''(a) > 0$, *entonces* f *tiene un* *mínimo local en* $x = a$.

El resultado recíproco no es cierto, puesto que la función $f(x) = x^4$ posee mínimo local en $x = 0$ y, sin embargo $f''(0) = 0$. Así pues un resultado en sentido inverso debe contener una hipótesis adicional, como por ejemplo $f'' \neq 0$.

Teorema

*Sea f: D $\subset$ **R** $\rightarrow$ **R**, una función dos veces derivable en un punto a tal que f''(a)*$\neq$0, entonces:

- *f tiene máximo local en x = a, si y sólo si f'(a) = 0 y f''(a) < 0.*
- *f tiene mínimo local en x = a, si y solo si f'(a) = 0 y f''(a) > 0.*

Observación.

No siempre se puede asegurar la concavidad o convexidad en términos de la derivada segunda. El siguiente resultado generaliza las condiciones suficientes para la existencia de máximo y mínimo local.

Teorema (conciciones suficientes). Funciones n-derivables

*Sea f: D $\subset$ **R** $\rightarrow$ **R**, una función n veces derivable en su dominio, y a un punto de D*

** Si f'(a) = 0, f''(a) = f'''(a) = ··· = $f^{(2k-1)}(a) = 0$ con 2k-1 < n y $f^{(2k)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x = a.*

** Si f'(a) = 0, f''(a) = f'''(a) = ··· = $f^{(2k-1)}(a) = 0$ con 2k-1 < n y $f^{(2k)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x = a.*

TEST

1) Dada una función f: [a, b] $\rightarrow$ **R**, tal que, la función derivada f':[a, b] $\rightarrow$ **R**, es una función estrictamente creciente en todo su dominio; i) ¿qué signo tiene la derivada segunda para $\forall x \in [a, b]$? ii) dada $c \in [a, b]$, con f '(c) = 0, ¿qué puede decir del punto (c, f(c)); iii) Dibuje la gráfica de una función que cumpla con estas condiciones.

2)Dada una función f : D $\rightarrow$ **R**, con D = **R** – {2, 3}; construya su gráfica con los siguientes resultados: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; d) (f(1) = 1, f'(1) = 0, f ''(1) < 0); e) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 5$; f) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 5$ g) (f(4) =4, f'(4) = 0, f''(4) > 0); h) $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\right.$ y $\left.\lim\limits_{x\to \infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 1\right)$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Dada una función f: **R** $\rightarrow$ **R**, derivable al menos dos veces en todo **R**.
¿Qué puede decir de los siguientes resultados? i) $\forall x \in\ ]-\infty, 1[\ \cup\ ]4, +\infty[$; f '(x) > 0.

ii) $\forall x \in \,]1, 4[,\ f'(x) < 0$. iii) $\forall x \in \,]2, +\infty[,\ f''(x) > 0$. iv) $\forall x \in \,]-\infty, 2[,\ f''(x) < 0$.

v) Si $f(2) = 2$, ¿ qué puede decir del punto de la gráfica, $(2, 2)$.

4) Dada una función $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, con $D = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$; continua en todo su dominio, y con simetría impar; construya su gráfica con los siguientes resultados:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; c) ($\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$);

d) ($f(2) = 5$; $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$); e) ($f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$)

5) Dada una función f; i) –Trace la gráfica de una función que satisfaga los siguientes resultados: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 1$; d) $f(2) = 5$; $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$;

e) $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$ y $f''(0) < 0$.

6) Dada una función f; continua en todo su dominio i) -Interprete los siguientes resultados: a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$; e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$; f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

7) Dada una función $f : D\subset\mathbf{R}$ □ $\mathbf{R}$, con $D = \mathbf{R} - \{1\}$; continua y derivable en todo su dominio, a partir de la siguiente información construya su gráfica. **a)** La función no es par ni impar; **b)** Los pares $(-1, -3)$; $(3, 1)$; $(0, -4)$ y $(5, 3)$ pertenecen al Grafo de la función; **c)** la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente 1 (uno) es una asíntota; **d)** en $x = 2$, $f(x) - x = 0$, si $x > 2$, $f(x) - x < 0$ **e)** los números derivados: $f'(-1)$ y $f'(3)$ son iguales a 0 (cero), $f'(5)$ es distinto de cero; **f)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; **g)** la función es estrictamente creciente para todo $x \in \,]-\infty, -1[\cap]3, +\infty[$, ¿qué signo tiene la derivada en éste intervalo?; **h)** la función es abierta hacia abajo en el intervalo $]-\infty, 1[\cap]5, +\infty[$, ¿ qué puede decir de la derivada segunda en éste intervalo?.; **i)** $f''(5) = 0$

<u>Bibliografía</u>:

Calculus. Apóstol.
Cálculo Infinitesimal de una Variable. De Burgos.
Calculus. Spivak.
El Cálculo. Leithold.
Mathématiques spéciales. Ramis- Deschamps- Odoux.

Parte II - GUÍA Nº3: *Aplicaciones de la Derivada*

Ejercicio Nº1. Teorema de Rolle

1)Hallar el punto c $\in$ [- 2, 4], para el cual se cumple que $f'(c) = 0$, si $f(x) = 3 + 2x - x^2$ es continua en [- 2, 4] y derivable en]- 2, 4[.

2) Calcule el valor de b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle (f(0) = f(b)) en el intervalo [0, b]. ¿Dónde cumple la tesis? ($f'(c) = 0$).

Ejercicio Nº2. Teorema del Valor Medio

Hallar el valor de c, correspondiente al teorema del valor medio, para $f(x) = x^2 - 1$ en [- 1, 1] (es decir, c $\in$]a, b[para el cual se cumpla que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$).

Ejercicio Nº3. Regla de L'Hôpital

Calcule los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} \right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Ejercicio Nº4. Extremos de una función. Puntos críticos

Hallar los puntos críticos (máximos, mínimos (locales y/o absolutos), si:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ b) $f(x) = 2 + (x + 1)^4$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$, en [- 1, 4] e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$, en [- 1, 1]

Ejercicio Nº5. Asíntotas

Dadas las siguientes funciones, encuentre las asíntotas (vertical, horizontal u oblicua):

a) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x + 4}$ c) $f(x) = e^{x - 3}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

Ejercicio Nº6. Funciones monótonas. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Indicar en qué subconjuntos del dominio las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, de acuerdo con el signo de la primera derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$ c) $f(x) = (2x^2 - 3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{3x-2}{1-x}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Ejercicio Nº7. Concavidad. Puntos de inflexión

Indicar en qué partes del dominio los gráficos de las siguientes funciones son cóncavos hacia arriba, cóncavos hacia abajo y determine (si existen) los puntos de inflexión:

a) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = 2x^3 + x$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = (x-3)(x+2)^2$ f) $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x+5}$

Ejercicio Nº8. Represente gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x}$; b) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-4}$; c) $f(x) = \ln(x^2-1)$;

d) $f(x) = \cos x$; e) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$

Ejercicio Nº9. Recta tangente. Recta normal

1) Para las siguientes funciones hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal, en el punto que se indique:

a) $f(x) = x^2 + 5$ en $x_o = 2$ b) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ en $x_o = 9$

c) $f(x) = e^{3x} - \operatorname{sen}(2x) + 1$ en $x_o = 0$.

2) Obtenga el punto de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 2x$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

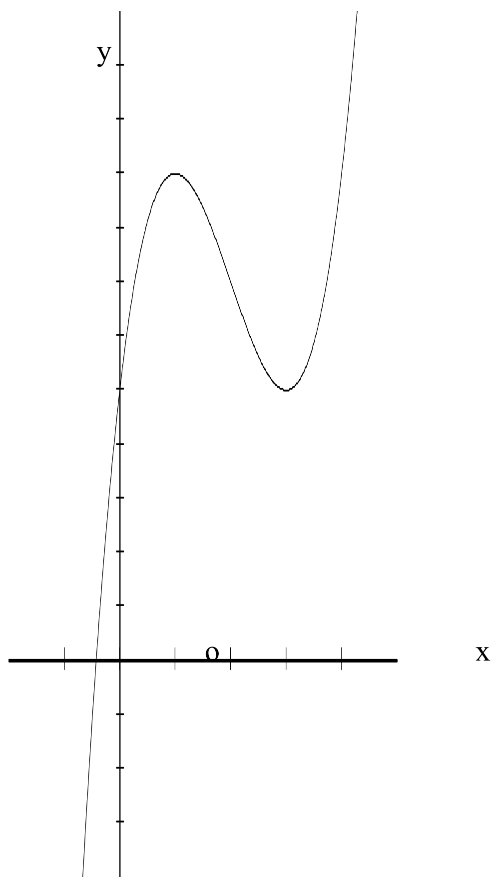
3) Indique si en algún punto el gráfico de cada una de las siguientes funciones tiene tangente vertical:

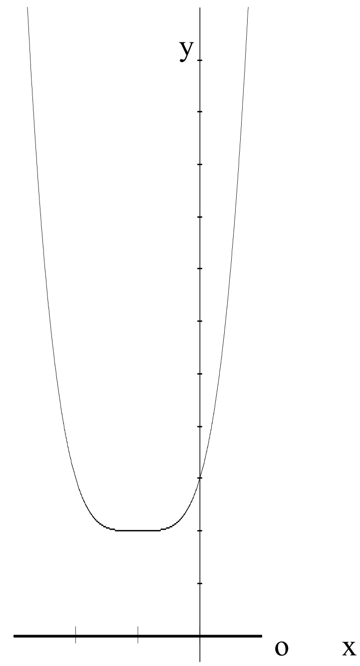
a) $f(x) = 2 - \sqrt{x+2}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Ejercicio Nº11. Problemas

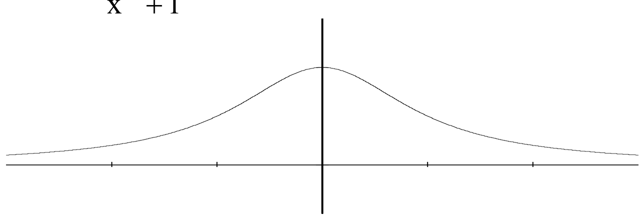
1) Indicar en qué puntos la tangente al gráfico de f forma con el eje positivo de abscisas un ángulo de 45º si $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 7x + 17$.
2) Averiguar cuál es el terreno rectangular de mayor área que se puede rodear con 100 metros de alambre.
3) Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.

Gráfica de Ej. 4.- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $f(x) = 2 + (x + 1)^4$

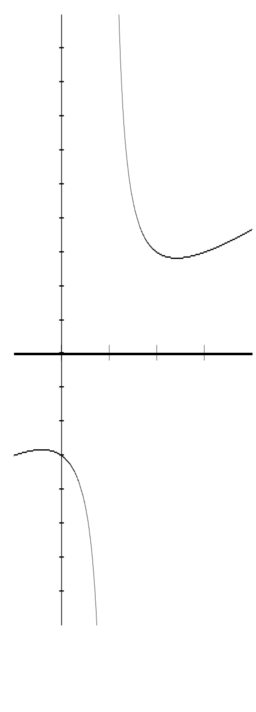




c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$, en [- 1, 4]



e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$, en [- 4, 4]