UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

MATEMÁTICA

Parte 1

Víctor Wall

Editorial Universitaria de Misiones
2008

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE MISIONES

San Luis 1870
Posadas - Misiones – Tel-Fax: *(03752)* 428601
Correos electrónicos:
edunam-admini@arnet.com.ar
edunam-direccion@arnet.com.ar
edunam-produccion@arnet.com.ar
edunam-ventas@arnet.com.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra
Coordinación de la edición: Claudio O. Zalazar
Tapa: Francisco Sánchez
Compaginación: Amelia E. Morgenstern
Corrección: Amelia E. Morgenstern
Impreso en Argentina

ISBN-10: 950-579-059-7
ISBN-13: 978-950-579-059-3

Wall, Víctor
Matemática: cuaderno 1/coordinado por Claudio Oscar Zalazar- 1a ed. - Posadas: EdUNaM - Editorial Universitaria de la Univ. Nacional de Misiones, 2007.
130 p.; 30x21 cm.
ISBN 950-579-059-7□□
1. Cálculo. 2 Números Reales 3. Funciones. Zalazar, Claudio Oscar, coord. II.□□Título□□
CDD 515

Fecha de catalogación: 11/12/2006

Índice

Cuaderno 1 de Matemática

El presente trabajo tiene como objetivo presentar al estudiante una guía de estudio, constituida por notas teórico-práctico de las clases dadas. Pero, bajo ningún concepto, intenta sustituir a la bibliografía existente sobre este tema, que el alumno deberá consultar permanentemente para lograr un efectivo aprendizaje.

Además, se sugiere al alumno estudiar previamente el Apunte para el Ingreso a la Facultad, es decir la Asignatura Matemática I, que se cursa en el Primer Año, previa aprobación de un Curso de Nivelación. El presente trabajo está dirigido a los alumnos de Bioquímica, Farmacia, Laboratorista Químico Industrial, Licenciatura en Genética y Profesorado en Biología de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones. Tiene como objetivo fundamental desarrollar los conceptos básicos del Cálculo, de acuerdo a los contenidos mínimos establecidos por el ECUAFIQ, (que, si bien, aparecen en la bibliografía disponible, no lo hacen en el orden y contenidos deseados) y por los docentes de las asignaturas de los años siguientes, que requieren a la matemática como una herramienta indispensable.

Creemos que el alumno tendrá, de esta manera, un elemento de trabajo que le facilitará el estudio de los conceptos básicos de Matemática en el Primer Año de estas carreras. Los temas presentados en este cuaderno son los que se desarrollarán en las clases teóricas, prácticas y trabajos complementarios y se corresponden con las Unidades I, II, III, y IV del Programa vigente de las Carreras mencionadas; constituyen (las clases), entonces, el el complemento necesario para una buena comprensión del texto.

Números reales

1. Sistema de números reales

1.1. Introducción

Problema: ¿el conjunto de los números racionales es suficiente para la solución de ecuaciones y realización de medidas?

Se sabe que el conjunto de números racionales que satisfacen la ecuación: $ax + b = 0$, con a y b números racionales y $a \neq 0$ es distinto de vacío.

Una proposición similar no es cierta, por lo menos para la ecuación de segundo grado; puede suceder que para a, b, c $\in$ **Q**:

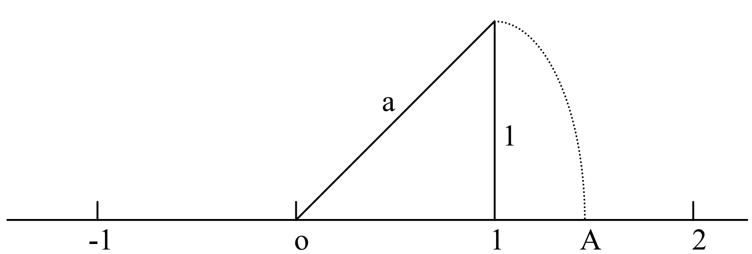
$$\{x \in \mathbf{Q} \ / \ ax^2 + bx + c = 0\} = \varnothing$$

Como ejemplo, se probará que $\{x \in \mathbf{Q} \ / \ x^2 - 2 = 0\} = \varnothing$; es decir, demostraremos que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. El conjunto de los números racionales es insuficiente para proporcionar soluciones a todas las ecuaciones de segundo grado. Esta insuficiencia también puede establecerse en términos geométricos:

Se sabe que entre dos números racionales distintos cualesquiera, existe un conjunto infinito de números racionales. Por consiguiente, podríamos suponer que a cada punto de una recta le corresponde un número racional. Esta suposición es falsa. Mediante una sencilla construcción geométrica podemos localizar un punto de la recta y demostrar que no existe número racional que se corresponda con ese punto.

Supongamos un triángulo isósceles, donde cada uno de los catetos tiene longitud 1. De acuerdo al Teorema de Pitágoras nos asegura que $a^2 = 1^2 + 1^2$, o también $a^2 = 2$, donde a es la hipotenusa del triángulo.

Por consiguiente, si existe un número que corresponda a la longitud de la hipotenusa, tendría que ser $a = \sqrt{2}$. Construimos el triángulo de manera que uno de sus catetos coincida con una recta.



El círculo con centro en O y radio a corta a la recta en A, es decir que la longitud del segmento OA, es la longitud de la hipotenusa a. Por lo tanto, si existe un número racional que corresponda al punto A, su cuadrado debe ser 2; es decir, un número racional p se corresponderá con el punto A si y solo si $p^2 = 2$.

Teorema 1

No existe un número racional p con la propiedad de que $p^2 = 2$

Demostración

Hacemos una demostración por contradicción: suponemos que existe un número racional p con la propiedad de que $p^2 = 2$. Como p es un número racional, existe una fracción a/b con las propiedad de ser irreducible, (primos entre sí), es decir que a y b son enteros sin otro factor que sea distinto a 1 y -1, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

De esta igualdad se observa:

$$a^2 = 2b^2$$

y como b es un entero, a^2 es un entero par. Por lo tanto a es un entero par y existe un entero k con la propiedad de que $a = 2k$. Substituyendo $2k$ por a se obtiene:

$$4k^2 = 2b^2 \quad ó \quad 2k^2 = b^2,$$

de donde observamos que b^2 *es par* y por consiguiente b es par.

Hemos demostrado que si la suposición: $p^2 = 2$. Con $p \in \mathbf{Q}$ es cierta, entonces existen enteros a y b con las siguientes propiedades.

i) a y b no tienen factores enteros comunes excepto 1 y -1 y
ii) a y b son ambos múltiplos enteros de 2.

Esto constituye una contradicción, por lo tanto la suposición es falsa y el teorema queda demostrado.

Hemos demostrado que en el conjunto de números racionales no existe una solución para la ecuación $x^2 = 2$ y que, además, el punto en la recta correspondiente a la medida de la hipotenusa de un triángulo isósceles, con catetos de longitud uno, no se corresponde con ningún número racional, es decir, no puede ser medido por un número racional.

El cuerpo de los números reales nos dará una solución a estos problemas. De cualquier manera conviene aclarar en este punto que, si bien el conjunto de los números reales proporciona soluciones para más ecuaciones que el conjunto de número racionales, no es adecuado para dar soluciones a todas las ecuaciones.

1.2. El cuerpo ordenado de los números reales

1.2.1. **R** es un cuerpo

En este conjunto se definen dos operaciones internas: la suma y el producto.

Es decir, toda vez que sumamos dos números reales obtenemos otro número real y cuando multiplicamos dos números reales obtenemos como resultado de la operación otro número real.

La suma, denotada +, es una operación asociativa, conmutativa, tiene por elemento neutro al 0 y cada número real x tiene su simétrico, llamado opuesto y denotado (-x).

El producto, denotado ·, es asociativo, conmutativo, tiene por elemento neutro al número uno (1), cada número real x, con excepción del 0, tiene simétrico, llamado inverso y denotado $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Y, finalmente se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Es decir:

Suma. (R, +)

Asociatividad:

$(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

Conmutatividad.

$(\forall x, y \in \mathbf{R}) \qquad x + y = y + x$

Neutro. (Existencia del 0)

$(\exists! 0 \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}) \qquad x + 0 = x = 0 + x$

Simetría. (Opuesto)

$(\forall x \in \mathbf{R}, (\exists (-x) \in \mathbf{R}) \qquad x + (-x) = 0 = (-x) + x.$

Toda vez que sumemos un número real "x" con el opuesto de otro número real "y", llamaremos a esta suma, diferencia y lo denotaremos: $x + (-y) = x - y$

Producto. ($\mathbf{R}$, $\cdot$)

Asociatividad:

$$(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Conmutatividad.

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

Neutro. (Existencia del 1)

$$(\exists! 1 \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}) \qquad x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

Simetría. (Inverso)

$$(\forall x \in \mathbf{R^*}, (\exists (x^{-1}) \in \mathbf{R}) \qquad x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$$

Donde $x \in \mathbf{R^*}$ significa que $x \neq 0$, es decir $\mathbf{R^*} = \mathbf{R} - \{0\}$, además se tiene que observar que: como $x^{-1} = \frac{1}{x}$, cuando multiplicamos $x \in \mathbf{R}$ por el inverso de otro $y \in \mathbf{R^*}$, lo denotaremos $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$, que llamamos cociente. O sea, no se puede dividir por 0.

Distributividad del producto respecto de la suma

Distributividad.

$$(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

O también: $\quad x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z) \quad$ (factor común x)

El conjunto de los números reales, con la adición y sus propiedades, el producto y sus propiedades, y la distributividad del producto respecto de la suma, le llamaremos en lo que sigue el cuerpo de los reales **R**.

Consecuencias. A partir de las propiedades enunciadas se desprende que:

1) $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

En efecto,

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x\,(0 + 1) = x \cdot 1 = x$$

de donde $x \cdot 0 = 0$.

2) $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ o } y = 0)$

Si fuera $x \cdot y = 0$ y $x \neq 0$, entonces obtenemos $x \cdot y = x \cdot 0$ y por cancelación, $y = 0$. Asimismo en el cuerpo **R**, si $x \cdot y \neq 0$, tendrán que ser x e y distintos de cero.

Podemos también explicar a partir de ésta definición axiomática la “regla de los signos” del Álgebra Elemental:

3i) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

De hecho, tenemos en primer lugar que $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y$, de donde $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. Análogamente, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

3ii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Tenemos que: $(-x) \cdot (-y) = -[x) \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y$. En particular $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Todas las demostraciones de las propiedades de los números reales (dónde intervienen la suma y el producto) tendrán que ser compatibles con esta definición axiomática.

1.2.2. **R** es un cuerpo totalmente ordenado

Sea **R** el conjunto de los números reales, construído a través de su definición axiomática. y que sabemos contiene a los conjuntos **N**, **Z** y **Q**. El conjunto **R** se representa en una recta, dado un origen O y una unidad, de forma que hablaremos indistintamente de un punto o de un número real.

En el cuerpo **R**, se destaca un subconjunto $\mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{R}$, llamado el conjunto de los elementos *estrictamente positivos* de **R** o *cono positivo*, de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

1.- La suma y producto de elementos estrictamente positivos son estrictamente positivos. Es decir,

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R}_+^*, \quad (x + y) \in \mathbf{R}_+^* \text{ e } (x \cdot y) \in \mathbf{R}_+^* .$$

2.- $\forall\, x \in \mathbf{R}$, exactamente una y sólo una de las tres alternativas siguientes es válida:

$$\text{o bien } x = 0, \quad \text{o bien } x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \text{o bien } (-x) \in \mathbf{R}_+^*$$

Asimismo, si tomamos $x \in \mathbf{R}_+^*$, indicaremos como $(\mathbf{R}_+^*)$ al conjunto de los elementos opuestos, es decir será: $(-x) \in -\mathbf{R}_+^*$.

Tenemos entonces que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_+^* \cup (-\mathbf{R}_+^*) \cup \{0\}$, siendo dos a dos disjuntos (no tienen elementos comunes). A los elementos de $(-\mathbf{R}_+^*)$ les llamaremos *estrictamente negativos* o *cono negativo.*

Propiedad: En un cuerpo ordenado, cualquiera sea $a \neq 0$ entonces $a^2 \in \mathbf{R}_+^*$

En efecto, siendo $a \neq 0$, tendrá que ser: o bien $a \in \mathbf{R}_+^*$ o bien $(-a) \in \mathbf{R}_+^*$. En el primer caso, $a^2 = a \cdot a \in \mathbf{R}_+^*$. En el segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in \mathbf{R}_+^*$ En particular, en un cuerpo ordenado $1 \cdot 1 = 1$ y es siempre positivo. De esto se sigue que $(-1) \in -\mathbf{R}_+^*$. Por otra parte podemos asegurar que no existe ningún elemento del cuerpo ordenado **R** cuyo cuadrado sea (-1).

Ejemplo.

1.- El conjunto de los números racionales en el cual el conjunto $\mathbf{Q}_+^*$ está formado por los números racionales p/q tales que $p \cdot q \in \mathbf{N}$, es un cuerpo ordenado. Se observa que esto significa que p y q tienen el "mismo signo".

Notación.

En el cuerpo ordenado R escribiremos $x < y$, y diremos que "x es estrictamente menor que y", para significar que $y - x \in \mathbf{R}_+^*$, o sea que $y = x + z$, donde $z \in \mathbf{R}_+^*$. O también escribiremos $y > x$, que se leerá "y es estrictamente mayor que x".

En particular $x > 0$ significa que $x \in \mathbf{R}_+^*$, es decir que x es positivo, en cambio $x < 0$ quiere decir que x es negativo, esto es que $(-x) \in \mathbf{R}_+^*$. Si $x \in \mathbf{R}_+^*$ e $y \in -\mathbf{R}_+^*$ siempre se tendrá $x > y$.

Propiedades.

Una relación de orden $x < y$ en el cuerpo ordenado **R** tiene las siguientes propiedades:

1.- Transitividad.

$$\text{Si } x < y \text{ e } y < z \text{ entonces } x < z$$

2.- Tricotomía.

Dados $x, y \in \mathbf{R}$, ocurre un y sólo una de las alternativas siguientes:

$$\text{o bien } x = y, \quad \text{o bien, } x < y, \quad \text{o bien } x > y.$$

3.- Monotonía de la adición.

Si $x < y$ entonces, para todo $z \in \mathbf{R}$, se tiene $x + z < y + z$.

4.- Monotonía del producto.

Si $x < y$ entonces, para todo $z > 0$, se tiene $x \cdot z < y \cdot z$;
ahora si $z < 0$, tendrá que ser $x \cdot z > y \cdot z$.

Para demostrar estas propiedades, deberemos usar las condiciones de orden enunciados antes.

Demostraciones.

Demostración de la propiedad 1.

Decir que $x < y$ e $y < z$ significa afirmar que $y - x \in \mathbf{R}_+^*$ y $z - y \in \mathbf{R}_+^*$. Entonces sabemos que $(y - x) + (z - y \in \mathbf{R}_+^*$, simplificando será $z - x \in \mathbf{R}_+^*$, lo que significa que $x < z$.

Demostración de la propiedad 2.

Dados $x, y \in \mathbf{R}$, se tendrá que o bien $y - x \in \mathbf{R}_+^*$, o bien $x - y = 0$. o bien $x - y \in -\mathbf{R}_+^*$. Entonces por el axioma 2 de orden, tendrá que ser $x < y$, o bien $x = y$, o bien $x > y$. Y estas alternativas se excluyen mutuamente.

Demostración de la propiedad 3.

Si $x < y$ entonces $y - x \in \mathbf{R}_+^*$, sumando y restando z, se puede escribir: $y - x = (y + z) - (x + z) \in \mathbf{R}_+^*$, esto significa que $x + z < y + z$.

Demostración de la propiedad 4.

Si $x < y$ e $z > 0$ tendrá que ser $y - x \in \mathbf{R}_+^*$ con $z \in \mathbf{R}_+^*$ Por consiguiente $(y - x)\cdot z \in \mathbf{R}_+^*$, y esto significa que $y\cdot z - x\cdot z \in \mathbf{R}_+^*$, por consiguiente $x\cdot z < y\cdot z$.

Si $x < y$ e $z < 0$, entonces $y - x \in \mathbf{R}_+^*$ con $(-z) \in \mathbf{R}_+^*$, de lo que se sigue $(y - x)\cdot(-z) \in P^*$, es decir $x\cdot z - y\cdot z \in P^*$, es decir $y\cdot z < x\cdot z$.

- En particular en un cuerpo ordenado $\mathbf{R}$, $x < y$ implica que $-y < -x$. Basta multiplicar ambos miembros de cualesquiera de estas desigualdades por (-1) para obtener la otra.

Asimismo, podemos decir que a partir de las propiedades de orden establecidas se pueden formular unas cuantas más, algunas de ellas aparecen como ejercicios propuestos al final del tema.

En un cuerpo ordenado **R**, escribiremos $x \leq y$ para significar que $x < y$ o $x = y$. Leeremos "x es menor o lo sumo igual que y". O también podemos escribir $y \geq x$ que leemos "y es mayor o a lo sumo igual que x", y en consecuencia, las dos expresiones son equivalentes. Es indudable que esto quiere decir que $y - x \in \mathbf{R}_+^* \cap \{0\}$. Al conjunto $\mathbf{R}_+^* \cap \{0\}$ le denotaremos como $\mathbf{R}^+$, es decir tomamos $\mathbf{R} = \mathbf{R}_+^* \cap \{0\}$. A los elementos de **R** los denominaremos elementos *no negativos* del cuerpo **R**. A un elemento x del conjunto $\mathbf{R}^+$ se lo caracteriza como $x \geq 0$.

- Se tiene evidentemente que $x \leq x$ para todo elemento de **R**.
- Dados $x, y \in \mathbf{R}$, se tiene $x = y$ si y solamente si $x \leq y$ e $y \leq x$.

Con excepción de la propiedad 2 (tricotomía), que es sustituída por las propiedades $x \leq x$ (reflexividad) y $(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimetría), ($\wedge$, es la conjunción y), todas las demás propiedades enunciadas antes y demostradas y, por demostrar para la relación $x < y$, valen también para la relación $x \leq y$.

Considerando al conjunto de los números reales como un cuerpo conmutativo y ordenado se puede definir al conjunto de los números naturales como un conjunto inmerso en **R,** y particularmente como subconjunto de **R**. En este curso suponemos que esta definición es conocida por el alumno. Considerando a los opuestos de **N**, se puede definir al conjunto de los enteros **Z,** de manera que tenemos la relación $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset K$.

Más aún, dados $m, n \in \mathbf{Z}$, con $n \neq 0$, existe el inverso $n^{-1} \in \mathbf{R}$. Podemos por consiguiente definir un nuevo conjuntos que contenga a todos los $m \cdot n^{-1} = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{R}$, donde $m, n \in \mathbf{Z}$, y $n \neq 0$. Evidentemente, este conjunto tendrá que ser un subcuerpo de y lo identificamos como **Q** el cuerpo de los números racionales. De manera natural podemos establecer ahora las siguientes inclusiones $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Ejercicios:

a) -Demuestre que: $\forall x, y, u, v \in \mathbf{R}, \ (x < y \ \wedge \ u < v) \Rightarrow x + u < y + v$.

b) -Demuestre que $\forall x, y \in \mathbf{R}, \ x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$.

1.2.3. Intervalos en la recta real. Cotas y extremos

I) Intervalos

Se llama intervalo abierto de extremos a y b al conjunto]a, b[definido así:

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, a < x < b\}, \quad \text{donde} \quad a < b.$$

Se denomina <u>intervalo cerrado</u> de extremos a y b al conjunto [a, b], definido así:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,/\, a \leq x \leq b\}, \quad \text{donde} \quad a \leq b$$

Se llaman <u>intervalos semiabiertos</u> (o semicerrados) de extremos a y b a *los conjuntos:*

$$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,/\, a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, a \leq x < b) \qquad \text{donde } a < b.$$

1.2.4. <u>Cotas y extremos de un conjunto.</u>

Sea $A \subset \mathbf{R}$, se dice que A está *<u>acotado superiormente</u>* si $\exists k \in \mathbf{R}$, tal que $k \geq x$, $\forall x \in A$. Es decir, si existe un valor k, mayor o igual que todos los valores del conjunto a; a este valor k se le llama *<u>cota superior.</u>*

Análogamente, se dice que $k' \in \mathbf{R}$ es una cota inferior del conjunto A si $k' \leq x$, $\forall x \in A$; entonces se dice que A está *<u>acotado inferiormente,.</u>*

Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice *acotado* si lo está superior e inferiormente.

Se llama *<u>extremo superior</u>* (o *<u>supremo</u>*) de $A \subset \mathbf{R}$ al valor real $M \in \mathbf{R}$ que sea la menor de las cotas superiores de A:

$$M = \text{menor } \{k \in \mathbf{R} / \text{ k cota superior de A}\}$$

Se llama *<u>extremo inferior</u>* (o *<u>ínfimo</u>*) de $A \subset \mathbf{R}$, al valor real m que sea la mayor de las cotas inferiores de A:

$$m = \text{mayor}\{k' \in \mathbf{R} \,/\, k' \text{ sea cota inferior de A}\}$$

A estos extremos M y m se les llama *<u>máximo</u>* y *<u>mínimo</u>* si pertenecen al conjunto A.(respectivamente)

Un conjunto no acotado no tiene extremos.

A los intervalos:

$$[x_0, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq x_0\}; \qquad]x_0, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, x > x_0\};$$

$$]-\infty, x_0[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \leq x_0\}; \qquad]-\infty, x_0[= \{x \in \mathbf{R} \,/\, x < x_0\};$$

se les llama semirrectas. Los primeros no están acotados superiormente, y los segundos no están acotados inferiormente.

Podemos ahora enunciar todos los axiomas que caracterizan a los números reales de la manera siguiente.

OBSERVACIÓN

1.3. Axiomática de los números reales

Resumiendo lo dicho hasta ahora, al conjunto de los números reales, se le puede fundamentar mediante un conjunto de axiomas, de forma que todas las propiedades se deduzcan de éstos:

Axioma1.

El conjunto de los números reales, **R,** relación a la suma y el producto de números reales, leyes de composición interna, es un cuerpo conmutativo.

($\mathbf{R}$, +, ·) *es un cuerpo conmutativo*, es decir:

- ($\mathbf{R}$, +) es un grupo abeliano, verifica las propiedades asociativa; existe un elemento neutro (el cero); todo elemento tiene su simétrico (el opuesto), y conmutativa.

- ($\mathbf{R}^*$, ·) es un grupo abeliano, verifica las mismas propiedades, el neutro es la unidad, y todo elemento (salvo el cero) tiene su simétrico, el inverso.

- Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Axioma 2.

($\mathbf{R}$, $\leq$) *es un conjunto totalmente ordenado y se verifican las propiedades*:

- Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbf{R}$,

- Si $x \leq y$, entoces $x \cdot z \leq y \cdot z$, $\forall z \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

Axioma 3. (Axioma del Supremo).

$\forall A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ y *A acotado superiormente, entonces A posee extremo superior*.

Con estos tres axiomas se construye el sistema de los números reales.

Es el axioma 3, es el que distingue el conjunto de los números reales del conjunto de los números racionales (los números racionales satisfacen todos los axiomas del sistema de los números reales excepto el axioma del supremo).

La pregunta que nos hacemos aquí es ¿Todos los conjuntos acotados superiormente tienen supremo?. Respuesta: ***en el sistema de los números reales, todos los conjuntos acotados superiormente tienen supremo.***

En otros términos el axioma del supremo, (axioma 3) dice: Si I es un conjunto no vacío de elementos de **R** superiormente acotado, I tiene un supremo en **R**

A partir de este axioma también se puede decir que todo conjunto de números reales distinto del vacío, ***acotado inferiormente tiene ínfimo***.

Teorema 2.

Si a y b son números reales positivos cualesquiera, existe un entero positivo n tal que b < na.

Esta propiedad arquimediana nos permite probar otra relación entre los números reales y los enteros positivos que parece intuitivamente obvia.

Además se puede observar que: para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n tal que $1/n < \varepsilon$

Teorema 3.

Para cualquier número real b, existe un entero m tal que $m - 1 \leq b < m$.

Ahora estamos en condiciones de probar que entre dos números reales cualesquiera hay un número racional. A veces este hecho se formula diciendo que "los números racionales son densos en los números reales".

Teorema 4.

Si a y b son dos números reales cualesquiera tales que $a < b$, entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$.

Para demostrar estos teoremas se deberá, consultar la bibliografía, en particular: Análisis Matemático; Curso de Introducción; Haaser; LaSalle; Sullivan; Trillas.

1.4. Valor absoluto

Definición.

Se llama valor absoluto sobre **R***, a la aplicación de* **R** *en* $\mathbf{R}_+$*, denotada*

$$x \mapsto |x|$$

y definida por:

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

OBSERVACIONES.

1º Para todo $x \in \mathbf{R}$, se tiene

$$\boxed{-|x| \leq x \leq |x|}$$

(Si $x \geq 0$, se tiene: $-|x| < x = |x|$. Si $x < 0$, se tiene: $-|x| = x \leq |x|$).

2º $(a \geq 0 \wedge -a \leq x \leq a) \Rightarrow |x| \leq a$.

En otros términos: $\boxed{|x| \leq a \Leftrightarrow (-a \leq x \leq a)}$

(Si $x \geq 0$, la consecuencia es: $x \leq a$. Si $x \leq 0$, es: $-a \leq x$).

3º $(a \geq 0 \wedge (x \geq a \vee x \leq -a) \Rightarrow |x| \geq a$. Demostrar.

También: $\boxed{|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \vee x \leq -a)}$

Teorema 5.

Cualesquiera que sean x e y de **R**, *se tiene*

1.- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2.- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
3.- $|x + y| \leq |x| + |y|$;

La demostración de 1 y 2 la debe hacer el alumno, para probar la propiedad 3, aplicamos dos veces la Observación 1º, esto es:

$$-|x| \leq x \leq |x|, \qquad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sumando miembro a miembro:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Es suficiente entonces aplicar la observación 2, para obtener:

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|;}$$

Esta relación se llama *desigualdad triangular*.

Propiedad. *Para todo x e y de* **R**, *se tiene:*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Observemos primero que esta relación es invariante cuando se cambia x por y. Se puede entonces suponer $|x| \geq |y|$. Tomamos $x - y = z$. Entonces,

$$x = y + z \Rightarrow |x| \leq |y| + |z| \Rightarrow |x| - |y| \leq |z|$$

La relación queda demostrada. Esta puede parangonarse a la desigualdad conocida en el triángulo: todo lado es mayor que la diferencia de los otros dos, propiedad que se deduce de la desigualdad triangular como se acaba de hacer.

OBSERVACIÓN. Se puede definir el valor absoluto sobre todo anillo A totalmente ordenado, en particular el conjunto de los Números Enteros **Z**. Se ve sin dificultad que el teorema y las propiedades son válidas cuando se reemplaza **R** por el anillo A y $\mathbf{R}_+$ por el cono positivo de A.

EJEMPLOS

1.1.- Resolver la ecuación de primer grado

$$2x + 3 = 5x - 6 \qquad (1)$$

Solución. Si x es una solución de $2x + 3 = 5x - 6$, entonces si sumamos el opuesto de 5x, y el opuesto de 3, a ambos miembros de la igualdad

$$2x + 3 + (-5x) + (-3) = 5x - 6 + (-5x) + (-3), \text{ queda}$$
$$2x + (-5x) = -6 + (-3)$$
$$-3x = -9$$

multiplicando por el inverso de (-3), o, lo que es lo mismo dividimos ambos miembros por (-3), se tendrá:

$$x = 3.$$

Esto demuestra que si x es una solución, entonces x deberá ser 3 y, por lo tanto x = 3 es la única solución posible.

Prueba. Para hacer la prueba reemplazamos x = 3 en la ecuación (1), y la igualdad tendrá que verificarse:

$$2 \cdot 3 + 3 = 5 \cdot 3 - 6$$
$$9 = 9$$

En la práctica la solución podría ser acortado usando el conectivo lógico "si y sólo si", que se simboliza $\Leftrightarrow$, y los pasos serán "reversibles", se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2x + 3 = 5x - 6 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x + 3 + (-5x) + (-3) = 5x - 6 + (-5x) + (-3) \\ &\Leftrightarrow \quad -3x = -9 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3. \end{aligned}$$

Finalmente escribimos el conjunto solución S = {3}.

1.2. Resolver la ecuación cuadrática: $x^2 + x - 6 = 0$. (2)

Solución.

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad o \quad x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x = 2 \ \text{ o } \ x = -3$$

Es decir, 2 y -3 son soluciones y además son las únicas soluciones de la ecuación (2). La comprobación de este resultado la puede hacer el alumno y la solución se escribirá

$$S = \{2, -3\}$$

<u>OBSERVACIÓN</u>. $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a = b \quad o \quad a = -b).$

Prueba.

$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 \\ \Leftrightarrow \ & a^2 - b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \ & (a - b) \cdot (a + b) = 0 \\ \Leftrightarrow \ & a - b = 0 \quad o \quad a + b = 0 \\ \Leftrightarrow \ & (a = b \quad o \quad a = -b). \end{aligned}$$

Volviendo al Ejemplo 1.2, podemos ahora resolver la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, completando el cuadrado, de la siguiente manera:

$$x^2 + x - 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x = 6,$$

Ahora sumamos a ambos miembros $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ de manera que el término de la izquierda de la igualdad $x^2 + x = 6$ sea un cuadrado perfecto, es decir:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 = 0 \ & \Leftrightarrow \ x^2 + x = 6 \\ & \Leftrightarrow \ x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \frac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow \ (x + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{25}{4} \\ & \Leftrightarrow \ \left(x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{25}{4}} \quad o \quad x + \tfrac{1}{2} = -\sqrt{\tfrac{25}{4}} \right) \\ & \Leftrightarrow \ \left(x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} \quad o \quad x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} \right) \\ & \quad (x = 2 \quad o \quad x = -3) \end{aligned}$$

Así que, el conjunto $S = \{2, -3\}$ es solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

1.3. <u>DESIGUALDADES</u>. Para resolver desigualdades se debe recurrir al Axioma 2 de la página 10, y también a algunas propiedades que surgen de ese axioma.

- Supongamos una desigualdad del tipo $ax + b \leq 0$; con $a \neq 0$

Encontrar la solución de una desigualdad (inecuación de primer grado con una indeterminada) será, entonces determinar el conjunto de números reales para los cuales se satisface la desigualdad dada.

Solución. Sumamos el opuesto de b a ambos miembros de $ax + b \leq 0$, es decir:

$$ax + b \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax \leq - b.$$

Para eliminar el número a del primer miembro de la desigualdad, se tienen dos casos.

1º) $a > 0$: $\quad ax \leq - b \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{b}{a}$ (multiplicamos por el inverso de a), y la solución vendrá dada por $S = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \leq -\frac{b}{a}\} =]-\infty, -b/a]$.

2º) $a < 0$: $\quad ax \leq - b \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{b}{a}$ (multiplicamos por el inverso de a, *como es un número menor a cero, debemos cambiar el sentido de la desigualdad*), y la solución vendrá dada por $S = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq -\frac{b}{a}\} = [-b/a, \infty[$.

1.4.- Si tenemos la desigualdad $5x + 7 > 3x - 5$, recordando que a una desigualdad, se le pueden sumar o restar números que la desigualdad sigue siendo del mismo sentido, vamos a restar 7 y 3x de manera que:

$$\begin{aligned} 5x + 7 > 3x - 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 5x + 7 - 7 - 3x > 3x - 5 - 7 - 3x \\ &\Leftrightarrow \quad 5x - 3x > - 5 - 7 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x > - 12 \\ &\Leftrightarrow \quad x > - 6 \end{aligned}$$

El conjunto solución lo podemos escribir con notación de intervalo como $S =]-6, \infty[$

1.5. Desigualdades que están expresadas como productos o cociente .

Consideremos las siguientes situaciones, $(\forall a,b \in \mathbf{R})$ i) $a \cdot b < 0$, ii) $a \cdot b \geq 0$.

i) Para encontrar el conjunto solución de una desigualdad de este tipo, debemos recordar que:

$$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^{\circ}) \quad a > 0 \;\; y \;\; b < 0 \\ \qquad\qquad o \\ 2^{\circ}) \quad a < 0 \;\; y \;\; b > 0 \end{cases}$$

El producto es negativo si los factores tienen signos distintos)

La solución se determinará encontrando las soluciones parciales S_1 y S_2 de 1º) y 2º) y finalmente la solución S de la desigualdad $a \cdot b < 0$ vendrá dada por la unión de las soluciones parciales.

ii) Para encontrar el conjunto solución de una desigualdad de este tipo, debemos recordar que:

$$a \cdot b \geq 0 \iff \begin{cases} 1^{o}) \quad a \geq 0 \ \text{ y } \ b \geq 0 \\ \qquad\qquad o \\ 2^{o}) \quad a \leq 0 \ \text{ y } \ b \leq 0 \end{cases}$$

(El producto es positivo si los factores tienen el mismo signo)

El procedimiento para escribir la solución de la desigualdad será el mismo que en el caso anterior.

NOTA.- En el caso de un cociente el concepto para encontrar la solución de la desigualdad respectiva es el mismo, en todos los casos se debe considerar la regla de los signos, como se verá en los ejemplos siguientes.

1.6.- Resolver la siguiente desigualdad de segundo grado: $x^2 + x - 6 < 0$.

<u>Solución</u>

Primero expresamos a la desigualdad como un producto, es decir:

$x^2 + x - 6 < 0 \iff (x - 2) \cdot (x + 3) < 0$, de manera que:

$$(x-2)\cdot(x+3) < 0 \iff \begin{cases} 1^{o}\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \Phi \\ 2^{o}\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left]-3, 2\right[\end{cases}$$

y finalmente $S = S_1 \cup S_2 = \Phi \cup \left]-3, 2\right[= \left]-3, 2\right[$

1.7.- Encontrar el conjunto solución de la desigualdad dada por: $\dfrac{-x-7}{x+3} \geq 0$

<u>Solución</u>

En ésta desigualdad, numerador y denominador deberán tener mismo signo, ya que el cociente deberá ser positivo o cero, el denominador será distinto de cero. Es decir:

$$\frac{-x-7}{x+3} \geq 0 \iff \begin{cases} 1^{o}\begin{cases} -x - 7 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \geq 7 \\ x > -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -7 \\ x > -3 \end{cases} ;\ S_1 = \Phi \\ 2^{o}\begin{cases} -x - 7 \leq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \leq 7 \\ x < -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -7 \\ x < -3 \end{cases} ;\quad S_2 = \left[-7, -3\right[\end{cases}$$

Es decir $S = S_1 \cup S_2 = \Phi \cup \left[-7, -3\right[= \left[-7, -3\right[$

1.8—Resolver la siguiente: $\frac{x-4}{x+8} < 2$.

Solución.

Sumamos (-2) a ambos miembros, para obtener una desigualdad comparable con el 0. Es decir:

$$\frac{x-4}{x+8} < 2 \iff \frac{x-4}{x+8} - 2 < 0 \iff \frac{x-4-2x-16}{x+8} < 0 \iff \frac{-x-20}{x+8} < 0$$

$$\frac{-x-20}{x+8} < 0$$

$$\iff \begin{cases} 1^{o} \begin{cases} -x-20>0 \\ x+8<0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x>20 \\ x<-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-20 \\ x<-8 \end{cases} \iff x<-20; \quad S_1 = \left]-\infty,-20\right[\\ 2^{o} \begin{cases} -x-20<0 \\ x+8>0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x<20 \\ x>-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-20 \\ x>-8 \end{cases} \iff x>-8; \quad S_2 = \left]-8,\infty\right[\end{cases}$$

Entonces: $S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -20\right[\cup \left]-8, \infty\right[$

Ejemplos de ecuaciones y desigualdades con valor absoluto.

1.9.- Resolver las siguientes ecuaciones: i) $|x| = 3$; ii) $|x-5| = 10$; iii) $|2x+4| = 8$; iv) $|2x+4| = 8x-1$.

Soluciones.

i) Por definición si $x \geq 0$ entonces $|x| = x = 3$;
si $x < 0$, $|x| = -x = 3$, es decir $x = -3$.
Por consiguiente el conjunto solución será: $S = \{-3, 3\}$.

ii) Si $x-5 \geq 0$, será $|x-5| = x-5 = 10$, de donde $x = 10+5 = 15$;
Si $x-5 < 0$, se tiene $|x-5| = -(x-5) = 10$, de donde $-x+5 = 10$, es decir $x = -5$
Luego el conjunto solución es: $S = \{-5, 15\}$

La prueba de la solución se hace reemplazando -5 y 15 por x en las hipótesis y en la ecuación dada.

iii) Igual que antes, si $2x+4 \geq 0$, será $|2x+4| = 2x+4 = 8$, de donde $x = 2$;
Si $2x+4 < 0$, $|2x+4| = -(2x+4) = 8$, es decir, $2x+4 = -8$, por lo tanto $x = -6$.
Conjunto solución : $S = \{-6, 2\}$. El Alumno debe hacer la prueba.

iv) Si $2x+4 \geq 0 \Rightarrow |2x+4| = 2x+4 = 8x-1 \Rightarrow 2x+4 = 8x-1 \Rightarrow 6x = 5$
$\Rightarrow x = \frac{5}{6}$;

Si $2x + 4 < 0 \Rightarrow |2x + 4| = -(2x + 4) = 8x - 1 \Rightarrow 10x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{10}$.

Prueba. Si tomamos $x = -\frac{3}{10}$ y reemplazamos en la hipótesis, $2x + 4 < 0$, nos queda $2(-3/10) + 4 < 0$ que es una contradicción. Tampoco satisface la ecuación $|2x + 4| = 8x - 1$, por consiguiente $-\frac{3}{10}$ no es un elemento del conjunto solución, en cambio $\frac{5}{6}$ si lo es, por lo tanto el conjunto solución será: $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$.

1.10.- Resolver las siguientes desigualdades: i) $| 6x | \leq 12$; ii) $|x - 4| < 8$; iii) $|x + 2| > 4$.

Soluciónes: Para resolver estas desigualdades, conviene repasar la definición de valor absoluto dada en la pag. 10 y, las propiedades 2º y 3º estudiadas en la pag. 11

i) De la prop. 2º (pag. 11): $| 6x | \leq 12 \Leftrightarrow (-12 \leq 6x \leq 12)$; (div. todo por 6)
$\Leftrightarrow (-2 \leq x \leq 2)$, de manera que el conjunto solución es $S = [- 2, 2]$.

ii) $|x - 4| < 8 \Leftrightarrow (- 8 \leq x - 4 \leq 8) \Leftrightarrow (-4 \leq x \leq 12)$, (se sumó 4).
En concecuencia el conjunto solución es: $S = [-4, 12]$.

iii) Por propiedad 3º, (pag. 11): $|x + 2| > 4 \Leftrightarrow (x + 2 > 4 \vee x + 2 < - 4)$
$\Leftrightarrow (x > 2 \vee x < -6)$.
El conjunto solución es: $S =]- \infty, -6[\cup]2, \infty[$

1.5.-PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE **R**

Topología.

Como fundamento de la topología tenemos la idea de "*proximidad*" o *continuidad*. Es decir, nuestro estudio se basará en precisar que se entiende por continuo y que transformaciones conservan esta continuidad.

Es decir la topología es la parte de la matemática que se ocupa de estudiar los conjuntos estructurados mediante relaciones que nos permitan decir cuando un elemento del conjunto es "contiguo" o próximo a una parte del mismo.

En primer lugar nos interesa definir la *distancia* en este conjunto y para ello necesitamos del valor absoluto que ya se ha estudiado.

1.5.1. Distancia

La distancia entre dos puntos $x, y \in \mathbf{R}$ se define como el valor absoluto de su diferencia:

$$d(x, y) = |x - y|$$

por ejemplo, la distancia entre -2 y 4 es igual a:

$$d(-2, 4) = |-2 - 4| = |-6| = 6$$

mientras que la distancia entre 5 y 0 es:

$$d(5, 0) = |5 - 0| = 5$$

La distancia verifica las propiedades:

i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. La distancia entre dos puntos es siempre no negativa.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. La distancia entre dos puntos es nula si y solo si ambos coinciden.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in \mathbf{R}$. La distancia entre "x" e "y" es la misma que entre "y" y "x".

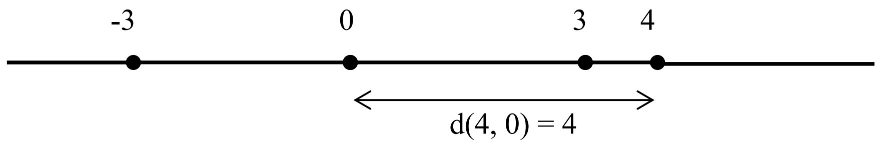
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z,y)$. $\forall x,y,z \in \mathbf{R}$. La distancia entre dos puntos es siempre menor que suma de distancias de estos dos puntos a un tercero (desigualdad triangular).

El estudiante puede comprobar que estas propiedades son deducibles a partir de las del valor absoluto. Los números reales son, a menudo, representados geométricamente como puntos de una recta (que llamaremos eje real o recta real). Se elige un punto para que represente al 0 y otro a la derecha del cero para que represente al 1. Esta elección determina la escala.

Con un conjunto adecuado de axiomas para la geometría euclídea, a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo, y recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo. Acostumbramos a referirnos al punto x en lugar del punto de la recta asignado al número real x.

La relación de orden puede interpretarse ahora de una manera gráfica. Si $x < y$, entonces el punto x está a la izquierda del punto y:

Esta recta es también un marco apropiado para interpretar la anterior definición de distancia. En efecto, comprobaremos que lo que entendemos por distancia entre dos números reales coincide con la “distancia” entre los puntos de la recta que representan a tales números.



A nivel práctico, mediante la definición de distancia y estas representaciones podemos deducir algunas propiedades adicionales y resolver inecuaciones donde interviene el valor absoluto.

Ejemplo.-

Hallar la solución de la siguiente inecuación:

$$|x - 3| \geq 1.$$

Podemos interpretar la desigualdad en el sentido de las distancias, de lo que resulta:

$$d(x, 3) \geq 1.$$

Gráficamente significa que debemos encontrar todos los puntos cuya distancia a 3 sea mayor o a lo sumo igual que uno. Es decir

Así la solución está formada de todos los números reales mayores o iguales que 4 unión con el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 2. En símbolos:

$$]-\infty, 2] \cup [4, +\infty]$$

¿Cómo podemos determinar la mayor o menor proximidad de un punto $x \in \mathbf{R}$ a un subconjunto $A \subset \mathbf{R}$? Esto se logra mediante los conjuntos que llamamos entornos de un punto.

1.5.2. Entornos de un punto de la recta real

Un *entorno abierto* centrado en un punto de la recta real x y de radio $r \geq 0$ es el conjunto formado por todos aquellos puntos que se encuentran a una distancia estrictamente menor de dicho punto que el valor del radio. En símbolos:

$$U(x, r) = \{y \in \mathbf{R} / d(x, y) < r\}.$$

Ejemplo.

Hallar el entorno abierto de centro 3 y radio $r = 1$.

Según la definición debemos encontrar los puntos y que se encuentren a una distancia menor que 1 del punto 3. En símbolos:

$$d(3, y) < 1 \Rightarrow |3 - y| < 1.$$

Para ello podemos usar las propiedades del valor absoluto:

$$|3 - y| < 1 \Rightarrow -1 < 3 - y < 1$$

y sumando a todos los miembros el valor -3 resulta:

$$-1 < 3 - y < 1 \Rightarrow -1 + (-3) < 3 - y + (-3) < 1 + (-3) \Rightarrow -4 < -y < -2.$$

Multiplicamos todos los miembros por (-1) (lo que invierte el sentido de los símbolos de desigualdad).

$$-4 < -y < -2 \Rightarrow (-4)(-1) > (-y)(-1) > (-2)(-1) \Rightarrow 4 > y > 2.$$

El entorno abierto de centro 3 y radio 1 es pues el intervalo abierto $]2, 4[$

Es decir en otros términos:

Se llama *entorno abierto centrado* en $x_0 \in \mathbf{R}$ a todo intervalo abierto de la forma: $]x_0 - r; \ x_0 + r[$, donde r es el radio del entorno y es un número real estrictamente positivo. $r > 0$; es decir su longitud es igual al doble del radio.

En el caso de que el radio sea cero se obtiene el conjunto vacío ya que la inecuación:

$d(y, x) < 0$ no puede ser satisfecha por ningún número real.

Se llama *entorno abierto* de $x_0 \in \mathbf{R}$ a todo intervalo abierto que contenga a x_0. Habitualmente se entenderá que es centrado en x_0 y se designará simplemente entorno de x_0; en caso contrario se indicará.

Se designará a los entornos de x_0 de la forma U_{x0} y, si fuese necesario, se indicará el radio del entorno escribiendo

$$U(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbf{R} / x_0 - r < x < x_0 + r\} =$$
$$= \{x \in \mathbf{R} / -r < x - x_0 < r\} = \{x \in \mathbf{R} / |x - x_0| < r\}$$

Se llama entorno reducido de x_0, y se escribe $U^*_{x_0}$ o $U^*(x_0, r)$, al conjunto $U^*_{x_0} = U_{x_0} - \{x_0\}$, es decir:

$$U^*_{x_0} =]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[= \{x \in R / 0 < |x - x_0| < r\}$$

que es el entorno de centro x_0 y radio r, excluido el punto x_0.

La primera definición sobre "proximidad" que podemos dar mediante el uso de entornos es la que sigue:

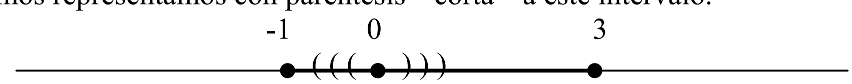
1.5.3. Punto adherente y adherencia de un conjunto.

Un punto x es contiguo (adherente) a un determinado conjunto A si todos los entornos de x tienen puntos del conjunto A. La colección de todos los puntos adherentes a el conjunto A se denomina adherencia de A y se denota por adh(A) o bien $\overline{A}$.

O sea, x es un punto adherente a $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$, si y solo sí cualquiera que sea el entorno de x, U(x, r), se verifica que: $A \cap U(x, r) \neq \emptyset$. Es decir la intersección del entorno de x con el conjunto A es distinta de vacío.

Ejemplo.

El punto 0 es adherente al conjunto A = [-2, 3], ya que todo entorno de 0 (cuyos extremos representamos con paréntesis "corta" a este intervalo.



Del mismo modo el punto 3 es adherente al conjunto A pues también todos sus entornos tiene puntos de dicho conjunto.

Asimismo si A = [-2, 3[, el punto 3 es de adherencia. (verificar la definición).

¿Es adherente el punto 3 si $A =]-1, 2] \cup \{3\}$?.
El punto 0, ¿es adherente al conjunto $a = \{x \in \mathbf{R} / x = 1/n, n \in \mathbf{N}\}$?.

Si el alumno hace una representación gráfica de este conjunto A podrá observar que todo entorno abierto de cero corta a algún punto de A ya que los elementos de este conjunto se "acercan" todo lo que queramos a cero. Esto significa que 0 es adherente a A. (aunque no pertenece al conjunto).

OBSERVACIÓN.

- Si x es un punto adherente a A.

- o bien, existe un entorno U de x tal que $(U - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y entonces x pertenece a A. Se dice que x es un *punto aislado* de A;

- o bien, todo entorno U de x es tal que $(U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ y entonces decimos que x es un *punto de acumulación* de A.

Es decir un punto de adherencia: o es un punto aislado o es de acumulación.

Propiedades.

1.- Se verifica la siguiente inclusión: $A \subset \overline{A}$.
2.- Todo punto de $\overline{A}$ es límite de una sucesión de puntos de A.

Ejemplos.

1.- La adherencia del intervalo $[a, b[$ es $[a, b]$.
2.- La adherencia de **Q** es **R**.

1.5.4. Recta real ampliada

Definición

La recta real ampliada es el conjunto $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sobre la cual es extendida la relación de orden total de **R** escribiendo

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Operaciones sobre $\overline{\mathbf{R}}$.-

La adición en **R** se extiende en $\overline{\mathbf{R}}$ tomando:

* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty; \quad (-\infty) + x = x + (-\infty)$
* $\quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

La multiplicación en **R** se extiende en $\overline{\mathbf{R}}$ conviniendo que:

* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\quad x > 0,\ x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty; \quad x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty;$
* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\quad x < 0,\ x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty; \quad x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty;$
* $(+\infty)(+\infty) = +\infty; \quad (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty; \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty$

OBSERVACIÓN.

La adición y la multiplicación no son dos operaciones sobre $\overline{\mathbf{R}}$ pues no están definidas:

$$(+\infty) + (-\infty); \quad (-\infty) + (+\infty); \quad 0(+\infty); \quad (+\infty)0; \quad 0(-\infty); \quad (-\infty)0.$$

También se puede extender la noción de entornos en $\overline{\mathbf{R}}$, conviniendo que una parte $\overline{U}$ de $\overline{\mathbf{R}}$ es un entorno de $+\infty$ si, y solamente si existe un $a \in \mathbf{R}$, tal que $]a, +\infty] \subset \overline{U}$, con

$$]a, +\infty] = \{ x \in \mathbf{R} / x > a\} \cup \{+\infty\}$$

y que una parte $\overline{W}$ de $\overline{\mathbf{R}}$ es un entorno de $-\infty$ si, y solamente si existe un $b \in \mathbf{R}$, tal que

$$[-\infty , b] \subset \overline{W}, \text{ con } [-\infty , b[= \{ x \in \mathbf{R} / x < b\} \cup \{-\infty\}.$$

1.6. Punto interior, exterior y frontera. Propiedades.

1.6.1. Punto interior y conjunto interior de un conjunto.

Sea $A \subset \mathbf{R}$, se dice que $x_0 \in A$, es un ***punto interior*** de A, si existe un entorno de x_0 contenido en A.

x_0 es *interior* de A si y sólo sí $\exists\, U_{x0},\ U_{x0} \subset A$

Al conjunto de puntos interiores de A se le designa int(A) y se lee *interior* de A:

$$\text{Int}(A) = \{x \in A / \ x \text{ interior de } A\}$$

Es claro que si $x_0 \notin A$, x_0 no puede ser interior del conjunto A, es decir, $\forall U_{x0},\ U_{x0} \not\subset A$ (ya que $x_0 \in U_{x0}$ y $x_0 \notin A$). Sin embargo, no basta que $x_0 \in A$ para que sea interior, puesto que para el conjunto $[0,1]$, $1 \in [0, 1]$ y $\forall U_1 \not\subset [0, 1]$, ya que $U_1 =]1 - r, 1 + r[$ con $r > 0$ y $]1 - r, 1 + r[\not\subset [0,1]$ puesto que $U_1 =]1 - r, 1 + r[$ con $r > 0$ y $]1 - r, 1 + r[\not\subset [0, 1]$ (los $x \in R$ tales que $1 < x < 1 + r$ pertenecen al entorno pero no pertenecen a $[0, 1]$.

Por lo tanto, $\text{Int}(A) \subset A;\ \forall A \subset \mathbf{R}$.

1.6.2. Punto exterior y conjunto exterior de un conjunto.

Sea $A \subset \mathbf{R}$, se dice que $x_0 \in \mathbf{R}$, es un ***punto exterior*** de A si existe un entorno x_0, U_{xo} , contenido en el complemento de A, A^c, es decir $x_0 \in \text{int}(A^c)$.

Al conjunto de puntos exteriores se le designa ext(A) y se lee exterior de A.

x_0 es ***exterior*** de A si y solo si $\exists\, U_{x0},\ U_{x0} \subset A^c$

x_0 es ***exterior*** de A si y solo si $\exists\, U_{x0},\ U_{x0} \subset A^c$

1.6.3. Punto frontera y conjunto frontera de un conjunto

Sea $A \subset \mathbf{R}$, se dice que $x_0 \in \mathbf{R}$, es *frontera* de A si todo entorno de x_0, U_{xo}, contiene puntos de A y de A^c, Al conjunto de puntos frontera de A se le designa front(A) y se lee frontera de A.

$$\boxed{x_0 \text{ es } \textit{frontera} \text{ de A si y solo si } \forall U_{x0},\ U_{x0} \subset A}$$

GUÍA Nº1: *Números Reales*

***I. R** tiene estructura algebraica de cuerpo conmutativo*

EJ. Nº1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x - 2 = 10x - 4$ b) $3x = \frac{2}{3}x + 5$ c) $\frac{2x+1}{5} + \frac{4x-1}{4} = \frac{x+9}{2}$

d) $15x - 8 = 3x + 2 - (x + 5)$ e) $\frac{1}{2x} = -\frac{7}{3}$ f) $-2(x - 5) = 0$

EJ. Nº2. Resolver las siguientes ecuaciones .

a) $x^2 = 8x$ b) $x^2 + 5 = 0$ c) $(x+5)^2 + 3x = (x + 3)(2x - 1)$ d) $(\frac{1}{2}x - \frac{3}{5})(x + 1) = 0$

e) $2x^2 - x - 10 = 0$ f) $x^2 + 4x - 5 = 0$ g) $(x - 3)^3 = x^3 + 5$

EJ. Nº3. Resolver las siguientes ecuaciones completando el cuadrado.

a) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 7 = 0$ c) $6x^2 - 5x - 21 = 0$ d) $x^2 - 4x = 0$

***II. R** es un conjunto totalmente ordenado.*

EJ. Nº4. Represente gráficamente el intervalo o conjunto dados. Exprese, además, cada intervalo como una desigualdad y cada desigualdad dada como un intervalo.

a) $x < -2$ b) $\{x / x < 2\} \cup \{x / x \geq 0\}$ c) $[2, 6]$ d) $x \geq 5$ e) $\{x / -3 < x < 2\}$
f) $\{x / x \leq -3/2\}$ g) $]-\infty, -7[$ h) $\{x / x > 1 \vee x > 4\}$ i) $[-3, \infty[$ j) $x > -4/3$
k) $1/2 < x < 7/4$ l) $\{x / x \geq -1\} \cap \{x / -3 < x < 2\}$ m) $]-2, 0]$ n) $x < 0$

EJ. Nº5. Resolver las siguientes desigualdades.

a) $x + 5 > 2$ b) $3x \geq 5$ c) $-4x > 0$ d) $3x - 5 > 7x + 12$ e) $-3x + 1 < 2x + 5$

f) $-9 \leq x + 9 < 7$ g) $\frac{2}{3}x - 4 \geq \frac{1}{5} + x$ h) $-3x \leq 0$ i) $-2x - 6 > 0$

EJ. Nº6. Resolver las siguientes desigualdades.

a) $3x\,(x - 4) > 0$ b) $(x + \frac{1}{3})\,(x - 8) \geq 0$ c) $2x\,(x - 5) < 0$ d) $(2x - 3)(\frac{2}{3} + x) \leq 0$

e) $x^2 + 5x - 1 \geq 5$ f) $2x^2 - x - 10 > 0$ g) $3x^2 - 7x + 6 < 0$ h) $x^2 - x \leq 0$

EJ. Nº7. Resolver las siguientes desigualdades.

a) $\frac{x}{2x-3} > 0$ b) $\frac{x}{2x-3} < 0$ c) $\frac{3x+1}{2x} \geq 1$ d) $\frac{x^2+1}{x} \leq 0$

III. *Cotas y extremos de un conjunto de números reales.*

EJ. Nº8. Para los siguientes conjuntos de números reales, determinar, en caso que existan, cota superior, cota inferior, supremo, ínfimo, máximo y/o mínimo.

a) $S_1 = \{n / n \in Z^+\}$ b) $S_2 = \{(1/n) / n \in Z^+_*\}$ c)]1, 2[d) [-2, 5]

IV- Valor absoluto de un número real.

EJ. Nº9. Probar que:

a) $|x| = |-x|$ b) $-|x| \leq x \leq |x|$ c) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

EJ. Nº10. Resolver.

a) $|x| = 2$ b) $|-x| = 2$ c) $|2x - 5| = 2$ d) $|x^2 - 1| = 0$ e) $|(1/2)x^2 + 3| = -2$
f) $|x - 4| \leq 3$ g) $|5x| < 0$ h) $|x/3| < 2$ i) $|x - 2| < 2$ j) $|x - (2/3)| < 1/2$
k) $|4x| > 2$ l) $|-x| > 0$ m) $|x/2| \geq 3$ n) $|x - 1/2| > 3/2$ ñ) $-|2x - 3| > 4$

V-*Propiedades Topológicas de R.*

EJ. Nº11. Usando la definición de distancia, encontrar:

a) d (3, 0) b) d (-3, 5) c) d (4, 0) d) d (5, 0) e) d (-2, 0)

EJ. Nº12. Represente gráficamente las siguientes relaciones:

a) $|x| = 2$ b) $|x| > 2$ c) $|x| < 2$ c) $|x - 3| < 2$ d) $|x - 3| > 2$

EJ. Nº13. Resuelva la desigualdad $|x - 3| \geq 1$, interpretándola en el sentido de las distancias.

EJ. Nº14. Resolver y representar en forma gráfica: a) $|2x - 1| < 3$ b) $|2x - 1| > 3$. ¿Alguno de estos conjuntos representa un entorno? Explique.

EJ Nº15. Escribir como intervalos y como entornos (si es posible), los siguientes conjuntos de números reales:

$A = \{x / 2 \leq x \leq 4\}$ $B = \{x / -1 < x < 3\}$ $C = \{x / -1 < x \leq 3\}$
$D = \{x / -7 \leq x < -2\}$ $E = \{x / -3 < x < -1\}$ $F = \{x / |x - 2| < 5\}$
$G = \{x / 0 < |x - 3| < 1\}$ $H = |x - 2| < \delta, \quad \delta > 0$

EJ Nº16. Para cada uno de los siguientes conjuntos, dar un entorno con centro en el origen, que lo incluya:

$A = \{x / -2 \leq x \leq 4\}$ $B = \{x / -10 < x < 7\}$ $C = \{x / |x| < 2\}$

EJ Nº17. Si $M =]1, 3] \cup \{4\} \cup [6, 7[$, decir cuál es la adherencia de M (conjunto de puntos adherentes a M).

EJ Nº18. Para los siguientes subconjuntos de **R**, hállese el conjunto derivado (conjunto de los puntos de acumulación):

a) $A = \{1/n, \ n \in \mathbf{N}^*\}$ b) $B = \{x / x \in \mathbf{Q}, |x - 1| < 3 \vee x = -3\}$ c) $]1,2] \cup \{3\}$

EJ Nº19. Determine el conjunto derivado de C, si $C = [a, b]$; $C =]a, b[$; $C = \mathbf{N}$
$C = \mathbf{Q}$; $C = \mathbf{R}$

Bibliografía.

Apóstol, Tom M. Calculus, Volumen 1, Editorial Reverte, S.A.
Doneddu, A. Curso de Matemáticas, Análisis y Geometría Diferencial. Aguilar.
Garzo, F.; Delgado, M.; Tabuenca, J. Matemática 1, McGraw.Hill.
Haaser; LaSalle; Sullivan. Análisis Matemático, Volumen 1, Editorial Trillas.
Leithhold, L. El Cálculo. Oxford University Press S.A.
Spivak, Michael. Cálculo Infinitesimal, Editorial Reverté, S.A.
Thomas-Finney. Cálculo de una Variable, Addison Wesley Longman S.A.

Unidad 2: Vectores en el plano y en el espacio

2.1. Vectores

2.1.1. Introducción

El estudio del Álgebra vectorial, desde el punto de vista axiomático, es quizás la introducción matemáticamente más satisfactoria pues proporciona una descripción de los vectores que es independiente de los sistemas de coordenadas y de cualquier representación geométrica especial. Sin embargo, en un curso de ingreso a primer año de la Universidad, es conveniente hacer una introducción analítica, y emplear segmentos orientados para interpretar muchos de los resultados geométricamente, y todo esto guiado muchas veces por la intuición y, además, restringido el estudio en dos dimensiones.

N-uplas de números reales

La idea de emplear un número para situar un punto en una recta fue conocida por los antiguos griegos. Descartes extendió esta idea, utilizando un *par de números* (a_1, a_2) para situar un punto en el plano, y una *terna* de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX los matemáticos probaron que no era necesario detenerse en las ternas de números. Se puede también considerar una *cuaterna* de números (a_1, a_2, a_3, a_4) o, más general, una *n-pla* de números reales

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para todo entero $n \geq 1$.Una tal n-pla se llama *punto n-dimensional o vector n-dimensional* siendo los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las *coordenadas o componentes* del vector.

El motivo por el cual se analiza este tipo de vectores es que muchos problemas suponen el estudio de sistemas de un número grande de ecuaciones, por ejemplo n, que se pueden investigar con mayor facilidad introduciendo vectores n-dimensionales.

Conviene decir en este punto también, que el estudio que se hará en dos dimensiones se podrá pasar rápidamente a tres dimensiones y generalizar, en un estudio más avanzado, a más de tres dimensiones, debido a que las propiedades son independientes de la dimensión que tengan los conjuntos de vectores que se estudien.

El análisis vectorial puede estudiarse en forma geométrica o analítica. Si el estudio es geométrico, primero se define un <u>*segmento dirigido*</u>, como un segmento de recta que parte desde un punto P y llega a un punto Q, y se denota por $\vec{PQ}$. El punto P se llama <u>origen</u>, y el punto Q se llama extremo. Después se dice que <u>dos segmentos dirigidos son iguales</u> si tienen la misma <u>*longitud*</u> y la misma <u>*dirección*</u>. El segmento dirigido $\vec{PQ}$ se llama vector de P a Q. Un vector se denota con una sola letra tipo negrita como **u** o si no también como, $\vec{u}$.

Al continuar con el aspecto geométrico del estudio de vectores, observe que si el segmento dirigido $\vec{PQ} = \vec{RS}$, entonces el segmento dirigido $\vec{RS}$ también es el vector $\vec{u}$. Por esto se considera que un vector permanece sin cambio si se mueve paralelamente a sí mismo. Con esta interpretación de vector se puede suponer, por conveniencia, que cada vector tiene su origen en algún punto de referencia fijo. Si se considera este punto como el origen del sistema coordenado cartesiano rectangular, entonces un vector podrá definirse analíticamente como un par ordenado de números reales. Tal definición permite el estudio desde un punto de vista puramente algebraico.

Se debe recordar que por $\mathbf{R}^2$ denotamos al producto cartesiano de **R** por **R**; que sus elementos son <u>*pares ordenados*</u> de números reales (a, b); que es un conjunto infinito y que su representación gráfica en un diagrama cartesiano, es todo el plano; a los elementos de $\mathbf{R}^2$, o sea , a los pares ordenados, se los denominan <u>***vectores***</u>, y se lo denotan en negrita: $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbf{R}^2$, (también $\vec{u}$); a los elementos de **R** se les llaman <u>***escalares***</u>**:** $a \in \mathbf{R}$. En el caso de $\mathbf{R}_3$, producto cartesiano de **R** x **R** x **R**, sus elementos son ternas ordenadas de números reales (a, b, c); es un conjunto también infinito y su representación gráfica es el espacio E. Lo que sigue se desarrolla en el plano, la extensión al espacio es inmediata.

Si se le provee a $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de las leyes siguientes:

1) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

2) $h(a, b) = (ha, hb)$.

1)- se denomina <u>***suma de vectores***</u> (esto es de pares ordenados), y es una ley de composición interna, asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro; el $\mathbf{0} = (0,0)$ y cada vector

$\mathbf{u} = (a, b)$ tiene su opuesto $(-\mathbf{u}) = (-a,-b)$;

2)- se denomina <u>***producto de un escalar por un vector,***</u> y es una ley de composición externa sobre **R**, a la aplicación $(a,\mathbf{u}) \rightarrow a\mathbf{u}$, de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$**,** y tiene las siguientes propiedades:

$\forall a,b \in \mathbf{R}$**;** $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$**;**

1° $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$;

2° $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$;

3° $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$;

4° $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Siendo 1 el elemento neutro del cuerpo de los números reales **R**.

Se dice entonces que $\mathbf{R}^2$ es un **R**-espacio vectorial, o más brevemente un R-espacio.

Esto que se acaba de describir se puede generalizar a un conjunto de naturaleza cualquiera E, sobre el cual se pueden realizar las operaciones de adición y multiplicación por números, (más general sería multiplicación por escalares de un cuerpo K cualquiera) con la exigencia de que tengan las mismas propiedades descriptas antes. Y entonces se dice que el conjunto E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Fundándose en estas consideraciones se desarrolla una teoría, que se denomina ***Álgebra Lineal.***

2. Plano euclidiano

Definiciones.

Se llama ***plano euclidiano*** (y se denota P) al R-espacio $\mathbf{R}^2$.

Todo vector **u** de P se denomina también un ***punto*** de P. Es del tipo:

$$\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

Consideremos los dos puntos $\mathbf{i} = (1,0)$ y $\mathbf{j} = (0,1)$. Cualquiera sea el punto $\mathbf{x} \in P$ es del tipo $\mathbf{x} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ pues,

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0,1).$$

Se observa ahora que esta descomposición es **única** pues

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j} \;\Rightarrow\; (a, b) = (c, d) \;\Rightarrow\; (a = c \text{ y } b = d).$$

{i, j} se denomina ***base canónica*** de P .

2.1. Interpretación geométrica

Si bien las definiciones anteriores pueden hacerse independientemente de la Geometría, los vectores y las operaciones con ellos tienen una interesante interpretación geométrica para el espacio R-espacio $\mathbf{R}^2$.

Un par de puntos **a** y **b** se llama *vector geométrico* si uno de los puntos por ejemplo **a**, es el *punto inicial u origen* y el otro , **b**, es *punto extremo*. (Figura 1).

Los vectores geométricos son especialmente útiles para representar ciertas magnitudes físicas tales como fuerzas, desplazamientos, velocidades, y aceleraciones, que poseen magnitud y dirección. La longitud de la flecha es una medida de la magnitud y la punta de la flecha indica la dirección que se precisa.

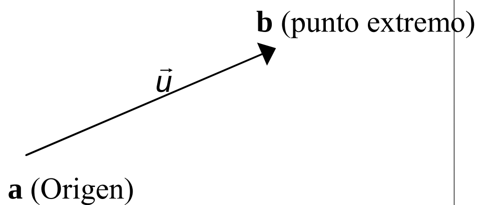
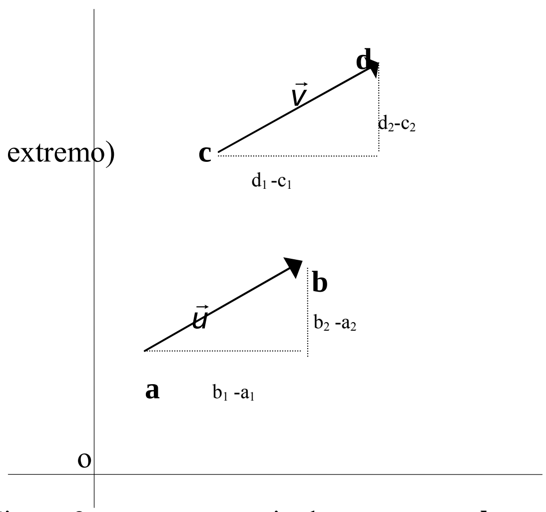


Figura 1. El vector geométrico



u = $\overrightarrow{ab}$ del punto **a** al **b**

Figura 2. **u** y **v** son equivalentes porque: **b - a** = **d - c**.

Supongamos que introducimos un sistema coordenado con origen o. La Figura 2 muestra los puntos **a** de coordenadas (a_1, a_2); el punto **b** = (b_1, b_2); el punto **c** = (c_1, c_2); el punto **d** = (d_1,d_2); dos vectores **u** = **ab** y **v** = **cd** tales que $\overrightarrow{b-a} = \overrightarrow{d-c}$. En función de los componentes, esto significa que :

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) \quad \text{y}$$

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} = (d_1, d_2) - (c_1, c_2) = (d_1 - c_1; d_2 - c_2),$$

entonces, de acuerdo a la igualdad de pares ordenados tendrá que ser:

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad (b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{y} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2) \quad (1)$$

En la Figura 2, las dos flechas que representan **u** y **v** tienen que tener la misma longitud, ser paralelos e indicar la misma dirección. Estos vectores geométricos se llaman *equivalentes*. Es decir **u** es equivalente a **v** siempre que se cumpla lo expresado en (1).

Ahora bien, se debe observar que: si se toma como punto inicial de los vectores al origen "o" de coordenadas, se puede hacer una interpretación geométrica de la ***suma de vectores*** en el plano. Por ejemplo, si tenemos los vectores **u** = (a,b) y **v** = (c,d) el vector suma será **u + v** = (a + c; b + d), y se podrá representar en el plano P = $\mathbf{R}^2$**:**

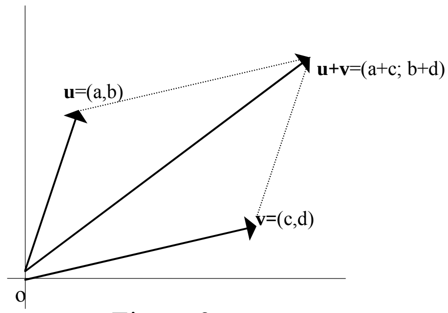
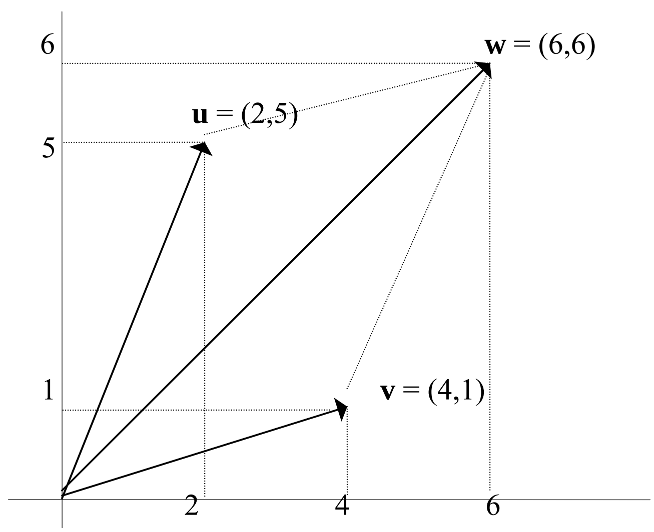


Figura 3.

Si **u** = (2,5) y **v** = (4,1) entonces el vector suma **w** = **u** + **v** = (2 + 4; 5 + 1) = (6, 6) y su representación en el plano $\mathbf{R}^2$ será:



En la Figura 3 y en el ejemplo se puede observar que el vector suma une el origen o, con el vértice opuesto del paralelogramo que tiene por lados a los vectores sumandos, (o si se prefiere la diagonal del paralelogramo). Esto se expresa diciendo que la adición de vectores corresponde geométricamente a la adición de vectores geométricos por medio de la ley del paralelogramo. La importancia en la física proviene del hecho notable de que muchas magnitudes físicas (tales como fuerzas, velocidades y aceleraciones) se combinan por medio de la ley del paralelogramo.

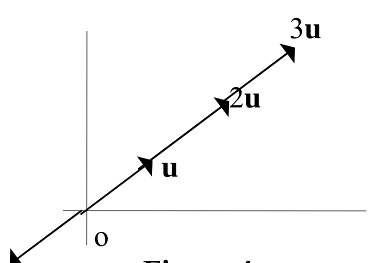


Figura 4.

La figura 4 representa geométricamente la multiplicación por escalares.

Si **v** = c**u**, el vector geométrico **v** tiene como longitud el producto de |c| por la longitud de **u**; tiene la misma dirección que **u** si c es positivo, y la dirección opuesta si c es negativo.

Esta interpretación geométrica de los vectores en $\mathbf{R}^2$, sugiere una manera de definir el paralelismo.

Definición

*Dos vectores **u** y **v** de $\mathbf{R}^2$ tienen la misma dirección si **v** = c**u** para un cierto escalar positivo c, y la dirección opuesta si **v** = c**u** para un cierto c negativo. Se llaman paralelos si **v**= c**u** para un cierto c no nulo.*

Obsérvese que esta definición permite considerar que todo vector tiene la misma dirección que él mismo. También se observa que esta definición asigna al vector cero las siguientes propiedades: el vector cero es el único que tiene la dirección de su opuesto y por lo tanto el único vector que tiene la dirección opuesta a sí mismo. El vector cero es el único vector paralelo al vector cero.

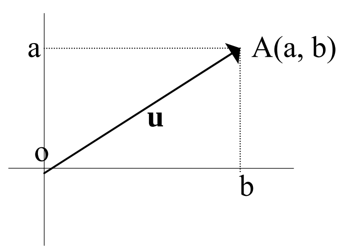
En cuanto a la interpretación geométrica de la sustracción de vectores, queda a cargo del alumno hacerla, teniendo presente que **u - v** = **u + (-v).** Es decir, para restar dos vectores, hay que sumar el opuesto.

Ejercicios

- Sean **u** = (1,3), **v** = (4,-3) y **w** = (2,1) tres vectores de $\mathbf{R}^2$. Determinar los componentes de cada uno de los vectores: a) **u + v**; b) **u - v**; c) **u + v - w;** d) **7u - 2v - 3w;** e) **2u + v - 3w.** En todos los casos graficar.

2.2.2. Longitud o norma de un vector

La figura muestra el vector geométrico que une el origen al punto A= (a, b) en el plano, y al que le asociamos el vector **u**. A partir del teorema de Pitágoras, encontramos que la longitud de **u** es:



$$\text{longitud de } \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

2.2.2.1. Propiedades fundamentales de la longitud de un vector

Para todo **u** y **v** de $\mathbf{R}^2$ y todo r de **R,**

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0; \qquad \|\mathbf{u}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\| r\mathbf{u} \| = |r| \cdot \| \mathbf{u} \|$$

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$$

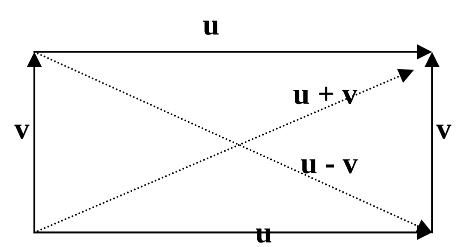
Se debe observar que las propiedades fundamentales de la longitud de un vector y la del valor absoluto de un número real son las mismas.

Las demostraciones de estas propiedades quedan a cargo del lector.

2.2.3. Vectores ortogonales

La palabra "ortogonal" significa en "ángulo recto" y es sinónima de "perpendicular".

Sean **u** y **v** los lados de un paralelogramo, (ver Figura). Los vectores **u** + **v** y **u** – **v** son las diagonales del paralelogramo.



Entonces, se puede observar que:

<u>*Un vector **u** es ortogonal a otro **v***</u>*, si* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Diremos entonces que el vector **u** es ortogonal al vector **v**, que implica que **v** es ortogonal a **u**. Por esta razón se usa con frecuencia la expresión "mutuamente ortogonales". O también decimos "**u** y **v** son ortogonales".

<u>Observación</u>

Si **u** y **v** son ortogonales, y **u** = (a, b) y **v** = (c, d); se debe observar entonces de la definición que:

$$\boxed{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.}$$

Como **u** + **v** = (a + c; b + d), su longitud será: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, y como **u** – **v** = (a-c; b-d); se tiene que la longitud de **u** – **v** es: $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$. Es decir:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|.$$

Por consiguiente:

$$(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|)^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 = (\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|)^2$$

igualando a cero:

$$(\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|)^2 - (\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|)^2 = 0 = (a+c)^2 + (b+d)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2$$

desarrollando los cuadrados y simplificando queda:

$$(\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|)^2 - (\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bd - d^2 = 0$$

$$= 4ac + 4bd$$

$$= 4(ac + bd) = 0$$

O sea que la ortogonalidad de los dos vectores **u** y **v** implica la anulación de la cantidad (ac + bd). Esta cantidad es de considerable importancia en álgebra, geometría y física, y es por ello que se le ha dado un nombre especial. (Producto escalar).

2.2.4. Producto escalar (interior) de vectores

Definición

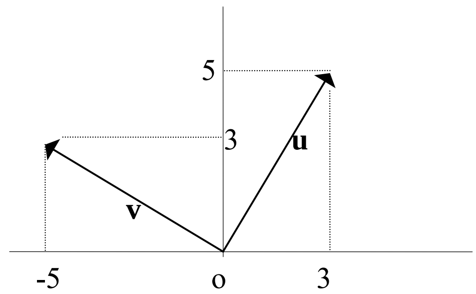
El *producto escalar* (interior) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *de dos vectores* **u** *= (a, b) y* **v** *= (c, d) está definido por:*

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd}$$

Se debe notar que el producto escalar de dos vectores es un *número real.* En física, cantidades tales como la longitud, el trabajo, la masa, la temperatura, se llaman cantidades “escalares”. Tienen magnitud, pero ninguna dirección y quedan especificadas (medidas) por números reales. En matemática se usa con frecuencia el término producto “interior”. Otro nombre para el producto escalar, es el de “producto punto”.

Podemos enunciar ahora que: dos vectores de P son ortogonales si su producto escalar es nulo, es decir las direcciones de los dos vectores se cortan formando un ángulo recto. Por ejemplo:

$\mathbf{u} = (3,5)$ y $\mathbf{v} = (-5,3)$ entonces $\mathbf{u.v} = 3.(-5) + 5.3 = 0$.



Ejercicio

-Verificar si son ortogonales los pares de vectores dados por:

a) (1,0) y (0,1); b) (-1,-2) y (2,-1); c) (2.3) y ¾ (-3,2); d) (a,b) y (-b,a);

e) c(a,-b) y c(b,a) ; f) (-2,5) y (15,6).

-Haga un gráfico de cada caso. ¿Qué conclusiones saca?

OBSERVACIÓN

Dado un vector $\mathbf{u} = (a, b)$, el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a^2 + b^2$, de lo que resulta la siguiente definición:

Definición.

*Si **u** es un vector en P, su longitud o norma se denota con **u** y se define mediante la igualdad.*

$$\| \mathbf{u} \| = (\mathbf{u.u})^{1/2}.$$

2.2.4.1. Propiedades fundamentales del producto escalar

1.- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2.- $(r\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

3.- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

4.- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$

5.- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

1° Teorema de Pitágoras

Sean **u** y **v** dos vectores cualesquiera de P. Se tiene entonces

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v}$$

Los vectores **u** y **v** son ortogonales si, y solamente si, $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$, luego si, y solo sí,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2.$$

Se obtiene así el *teorema de Pitágoras:*

Teorema

Dos vectores **u** *y* **v** *de P son ortogonales sí, y solamente sí,*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2.$$

2° Desigualdad de Schwarz

Cualesquiera que sean los vectores **u** *y* **v***, se tiene*

$$|\mathbf{u}.\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

3° Desigualdad triangular

Cualesquiera que sean los vectores **u** *y* **v***:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| .$$

Las demostraciones de éstas propiedades se hacen en clases de Matemática de Primer Año de las distintas carreras de esta Facultad.

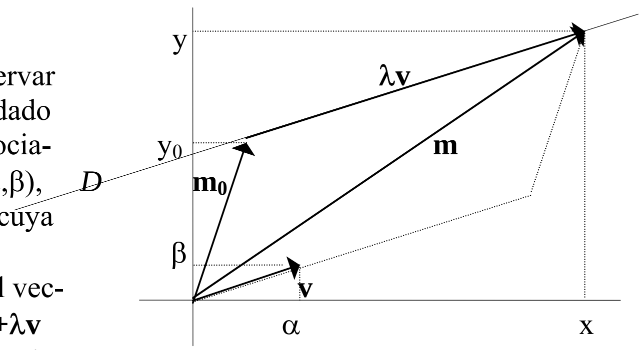
Ejercicios

- Sean $\mathbf{u} = (1,2)$, $\mathbf{v} = (-1,2)$ y $\mathbf{w} = (0,1)$ tres vectores de P. Calcular cada uno de los siguientes productos: a) **u.v** ; b) **v.w** ; c) **u.w** ; d) **u.(v+w)** ; e) **(u-v).w**.

- Sean $\mathbf{u} = (2,-1)$; $\mathbf{v} = (-1,-2)$; y $\mathbf{w} = (1, -1)$ tres vectores de P. Calcule la longitud de cada uno de los siguientes vectores:
a) **u+v** ; b) **u - v** c) **u+v - c** ; d) **u - v+w.**

2.2.5. Ecuación vectorial de la recta que pasa por un punto y que es paralela a la dirección de un vector dado

En la Figura se pueden observar los datos del problema: el punto dado de coordenadas (x_0,y_0), al que le asociamos el vector $\mathbf{m_0}$, el vector $\mathbf{v} = (\alpha,\beta)$, que tiene la dirección de la recta *D* cuya ecuación queremos formular.



Además se puede ver que el vector $\mathbf{m} = (x,y)$ es el vector suma $\mathbf{m_0}+\lambda\mathbf{v}$ que queda determinado asignándole a λ un número real cualquiera.
Es decir, podemos entonces escribir la ***ecuación vectorial de la recta*** como:

$$\boxed{\mathbf{m} = \mathbf{m_0} + \lambda\, \mathbf{v} \;, \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}} \quad (1)$$

Si se escribe en términos de las coordenadas queda:

$$\boxed{(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta) \;;\; \text{con } \lambda \in \mathbf{R},} \quad (2)$$

de manera que, si se conoce un punto de la recta, por ejemplo el (x_0, y_0) y un vector de coordenadas (α, β), asignándole un valor a λ se puede encontrar otro punto, y de esa manera trazar la gráfica de la recta.

Además, si se hace la suma de pares ordenados indicada, se puede presentar a la ecuación de la recta de distintas maneras:

O sea:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (\lambda\alpha; \lambda\beta) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (x_0+\lambda\alpha \,;\, y_0+ \lambda\beta), \text{ es decir que:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \end{array}} \quad (3)$$

que son las ***ecuaciones paramétricas de la recta*** cuando el parámetro λ recorre **R.**

Ecuación cartesiana de una recta

Si de las ecuaciones dadas en (3) se elimina λ y se iguala queda:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta} \quad (4);}$$

La relación (4) es la condición necesaria y suficiente que deben satisfacer las coordenadas x,y de un punto **m** para que **m** pertenezca a la recta *D* definida en el punto (x_0,y_0) y el ***vector director*** $\mathbf{v} = (\alpha,\beta)$ cuando $\alpha\beta\neq 0$.

La relación (4) se llama *ecuación cartesiana de la recta D definida por el punto* (x_0,y_0) *y el vector director* (α,β)*, supuesto* $\alpha\beta\neq 0$*.*

La ecuación (4) se escribe también:

$$(x - x_0)\beta = (y - y_0)\alpha, \text{ o también, } \quad \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0.$$

Por consiguiente, es del tipo:

$$\boxed{ax + by + c = 0 \quad (\text{con } a,b,c, \in \mathbf{R})} (5)$$

Se debe observar que: $a = \beta$; $b = -\alpha$ y $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.

Toda ecuación de la forma (5), donde a y b no son simultáneamente nulos, representa una recta; en otras palabras, al conjunto de las soluciones (x, y) de la ecuación (5) le corresponde el conjunto de los puntos **m** de una recta.

Además, si se despeja "y" de (5) la ecuación toma la forma ya estudiada en el tema anterior, es decir, queda:

$$\boxed{y = kx + d \quad (\text{con } k, d \in \mathbf{R})} \quad (6)$$

Ahora, uno se debe preguntar: ¿qué relación existe entre a, b, k, α, β y el vector dirección **v**? También se debe recordar que el número real "k", es la pendiente de la recta .

Recta definida por dos puntos

Sean (x_0,y_0) y (x_1,y_1) las respectivas coordenadas de dos puntos. Entonces el vector **v** paralelo a la recta (se llama **vector director** de la recta), tendrá por coordenadas a:

$$\alpha = x_1 - x_0, \quad \beta = y_1 - y_0 .$$

Sustituyendo en (3) se obtiene:

$$x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$$
$$y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

Si eliminamos λ queda:

$$\lambda = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (7)}$$

La ecuación (7) es la ***ecuación cartesiana de una recta definida por dos puntos***.

Recta definida por las intersecciones con los ejes de referencia

Se puede hallar la ecuación cartesiana de la recta definida por los puntos (a, 0) y (0, b) de los ejes coordenados, reemplazando en la ecuación (7), (x_0, y_0) por (a, 0) y (x_1, y_1) por (0, b). Dicha ecuación se puede escribir, si $ab \neq 0$, en la forma:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad (8)$$

Tal es la ecuación cartesiana de la recta que corta al eje "x" en el punto de abscisa a, y al eje "y" en el punto de ordenada b.

Ejercicios. En todos los casos, i) encuéntrese la ecuación vectorial de la recta, ii) haga una representación gráfica, y iii) escriba la ecuación en su forma cartesiana.

- Dado el punto $\mathbf{m_0}$ y el vector **v.**

a) $\mathbf{m_0} = (-3, 5)$ y $\mathbf{v} = (3, 2)$; b) $\mathbf{m_0} = (-2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 2)$; c) $\mathbf{m_0} = (1, -3)$ y $\mathbf{v} = (-1,2)$; d) $\mathbf{m_0} = (3, 0)$ y $\mathbf{v} = (-3, 3)$; e) $\mathbf{m_0} = (0, -2)$ y $\mathbf{v} = (1, 3)$.

- Dada la pendiente k y el punto (a, b).

a) k = 1 y (1, 3); b) k = 3/2 y (-2, 1); c) k = -5/2 y (3, 2) ; d) k = -1 y (0, -1);

- Dados dos puntos.

a) (1, 2) y (3, 4); b) (-4, 3) y (-1, -3); c) (-1, 5) y (3, 1); d) (4, -1) y (-1, -4);

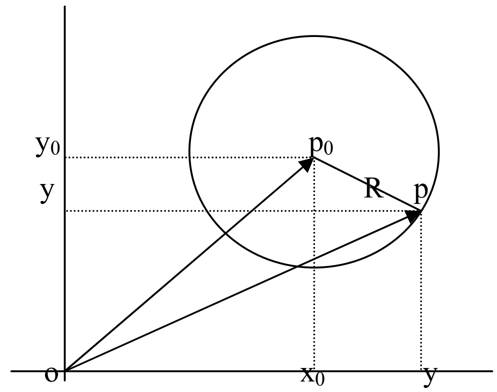
2.6. Ecuación de la circunferencia.

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que están a una misma distancia, (radio del círculo) de un punto fijo p_0 de coordenadas (x_0, y_0).

Si consideramos un punto cualquiera p de coordenadas (x, y), entonces la distancia desde p a p_0 será el radio R de la circunferencia, y queda determinada por

$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, o lo que es lo mismo $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

Se debe observar que el radio de la circunferencia, no es otra cosa que la longitud del vector que va de p_0 a p.



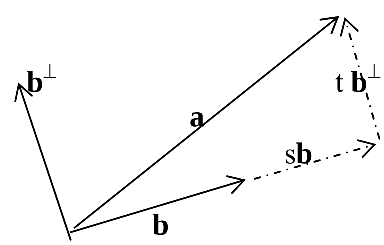
2.7. Proyección Ortogonal. Componentes

Como introducción al tema, el alumno deberá resolver el siguiente ejercicio:

Determine un vector que sea ortogonal al dado por **u** = (a, b) y que tenga la misma longitud.

Los conceptos de "proyección ortogonal" y de "componente" son de importancia tanto en geometría como en física, y el producto escalar nos da un procedimiento sencillo para calcularlo.

Dados dos vectores cualesquiera del plano **a** y **b** (ver figura) siempre es posible escribir al vector **a** en términos del **b** y del $\mathbf{b}^{\perp}$, por ejemplo $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}$ para algunos números reales s y t, decimos que **a** es una *combinación lineal* de **b** y $\mathbf{b}^{\perp}$.



Esto significa que podemos construir un triángulo con hipotenusa **a** (**a**≠0) y lados paralelos a **b** (**b**≠0) y $\mathbf{b}^{\perp}$.

Teorema

Si **b** ≠ 0, *entonces para cada vector de* $\boldsymbol{R}^2$ *hay números únicos s y t tales que:*

$$\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp} .$$

Supongamos que existen números s y t tales que: $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}$

Entonces, si multiplicamos por **b** queda:

$$\mathbf{a.b} = (s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}).\mathbf{b} = s\mathbf{b}.\mathbf{b}$$

y, si multiplicamos por $\mathbf{b}^{\perp}$:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^{\perp} = (s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp})\,\mathbf{b}^{\perp} = t\mathbf{b}^{\perp}.\mathbf{b}^{\perp} = t\mathbf{b}.\mathbf{b}.$$

De donde, si existen tales números son únicos, y

$$s = \mathbf{a.b}/|\mathbf{b}|^2 \quad \text{y} \quad t = \mathbf{a}.\,\mathbf{b}^{\perp}/|\mathbf{b}|^2.$$

Verificamos ahora que:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b}^{\perp}$$

para todos los vectores **a** y todos los vectores no nulos **b**.

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, entonces:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b}^{\perp} = \frac{1}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\{[a_1b_1 + a_2b_2](b_1, b_2) + [-a_1b_2 + a_2b_1](-b_2, b_1)\}$$
$$= \frac{1}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\left(a_1\left[b_1^2 + b_2^2\right];\ a_2\left[b_1^2 + b_2^2\right]\right)$$
$$= (a_1, a_2) = \mathbf{a}.$$

La descomposición de un vector **a** en dos vectores, paralelo a **b** uno y perpendicular a **b** el otro, se obtiene geométricamente por proyección ortogonal. El vector s**b** se llama "proyección ortogonal de **a** sobre **b**". Se tiene $s\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b}$

<u>Definición:</u>

*Sean **a** y **b** ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$). La proyección ortogonal de **a** sobre **b**, denotada por **Proy$_b$a**, es el vector*

$$s\mathbf{b} = \mathbf{Proy_b a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|^2}\mathbf{b}$$

Por consiguiente:

$$\mathbf{a} = \mathbf{Proy_b a} + \mathbf{Proy_b{}^{\perp} a}.$$

<u>Definición</u>:

*El número **a.b**/ |**b** | se llama <u>componente</u> de **a** en la dirección de **b** ($\mathbf{b} \neq 0$) y se denota por Comp$_b$**a**; es decir*

$$Comp_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

El componente de un vector en la dirección de otro vector tiene un significado geométrico (y físico) definido, y la relación entre componente y producto escalar describe geométricamente al producto escalar. Según la definición de componente:

$$\mathbf{a.b} = |\,\mathbf{b}\,|\ \mathrm{Comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Esta ecuación nos dice:

El producto escalar **a.b** *es el producto de la longitud de* **b** *por la componente de* **a** *en la dirección de* **b**.

Si **b** es un vector unitario, entonces $\mathrm{Comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a.b}$. Por esta razón es a menudo conveniente especificar direcciones por medio de vectores unitarios.

Se puede también probar que:

$$\mathbf{a.b} = |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,| \cos\theta.$$

y

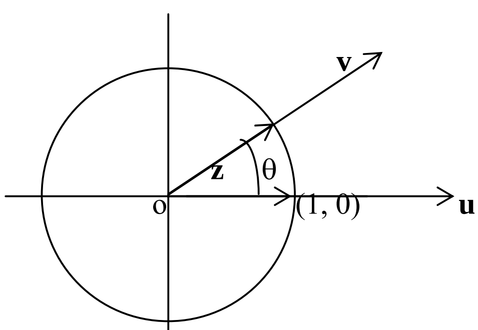
$$\mathbf{a.b}^{\perp} = |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,| \operatorname{sen}\theta.$$

Donde θ es el ángulo desde **a** hasta **b.**

2.2.7. Expresión trigonométrica del producto escalar

Sean un vector **u** de longitud $||\mathbf{u}||$ y un vector **v** de longitud denotada por $||\mathbf{v}||$, el ángulo comprendido entre los dos vectores θ y consideramos un sistema de referencia ortonormal $\{o, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ de manera que, la dirección del vector **u** sea la misma que la dirección del vector $\mathbf{i} = (1, 0)$ y un vector **z** de longitud uno, es decir $||\mathbf{z}|| = 1$ y de la misma dirección del vector **v**.

Entonces tenemos: $\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||\cdot\mathbf{z} = ||\mathbf{v}||\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ **;** $\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||\cdot\mathbf{i},$



Por consiguiente:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\cdot\mathbf{i}\cdot||\mathbf{v}||\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$$= ||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||\cdot[(1, 0)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)]$$

es decir, considerando el producto escalar:

$$(1, 0)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 1\cdot\cos\theta + 0\cdot\operatorname{sen}\theta;$$

queda:

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||\cdot\cos\theta}$$

Si no recuerda las definiciones del seno y del coseno, vuelva a estudiar este concepto después de estudiar la Unidad 3 correspondiente a funciones reales de variable real.

Hasta ahora se han estudiado el espacio numérico unidimensional **R** (Álgebra 1), la recta numérica, y el espacio bidimensional $\mathbf{R}^2$, el plano numérico. Se identificaron los números reales de **R** con los puntos de un eje horizontal y los pares de números reales de $\mathbf{R}^2$ con los puntos de un plano geométrico. Ahora antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, definamos que entendemos por espacio numérico tridimensional.

2.3. ESPACIO NUMÉRICO TRIDIMENSIONAL

2.3.1. Definición

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales recibe el nombre de espacio numérico tridimensional, y se denota por $\boldsymbol{R^3}$ *o E. Cada terna ordenada (x, y, z) se denomina* ***punto*** *del espacio numérico.*

Para representar este conjunto se consideran las distancias de un punto a tres planos mutuamente perpendiculares. Los tres planos se forman al tomar tres rectas perpendiculares entre sí, las cuales intersectan en un punto llamado origen. Estas rectas se denominan ejes de coordenadas.

Una terna ordenada (x, y, z) se asocia con cada punto del espacio geométrico tridimensional. Estas tres coordenadas se denominan coordenadas cartesianas rectangulares del punto en cuestión.

2.3.2. Definición de vector en el espacio tridimensional

Un vector en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales (x, y , z). Los números x, y, z se denominan ***componentes*** *del vector* $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Si se le provee a $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de las leyes siguientes:

1) $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d,\ b + e, c + f)$,
2) $h(a, b, c) = (ha, hb, hc)$.

1) se denomina ***suma de vectores*** (esto es de ternas ordenadas), y es una ley de composición interna, asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro; el $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y cada vector $\mathbf{u} = (a, b, c)$ tiene su opuesto $(-\mathbf{u}) = (-a, -b, -c)$;

2) se denomina ***producto de un escalar por un vector,*** y es una ley de composición externa a la aplicación

$$(a, \mathbf{u}) \rightarrow a\mathbf{u}, \qquad \text{de } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \text{ en } \mathbf{R}^3,$$

y tiene las siguientes propiedades:

$\forall a,b \in \mathbf{R}$; $\quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$;

$$1° \quad a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}; \qquad 2° \quad (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u};$$
$$3° \quad a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}\ ; \qquad 4° \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Siendo 1 el elemento neutro del cuerpo de los números reales **R**.
Se dice entonces que $\mathbf{R}^3$ es un **R**-espacio vectorial, o más brevemente un R-espacio.

El vector cero es el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Se llama **espacio euclidiano** (y se denota E) al R-espacio $\mathbf{R}^3$.
Todo vector **u** de E se denomina también un ***punto*** de P. Es del tipo $\mathbf{u} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

Consideremos los tres puntos: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$; $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y el $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Cualquiera sea el punto $\mathbf{x} \in E$, es del tipo $\mathbf{x} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ pues,

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1$$

Se observa ahora que esta descomposición es **única** pues

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k} \Rightarrow (a, b, c) = (d, e, f) \Rightarrow (a = d \text{ y } b = e \text{ y } c = f).$$

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se denomina ***base canónica*** de E .

2.3.3. Producto escalar

El producto escalar es una aplicación de E x E en **R** y tiene las mismas propiedades que el definido en el plano.

Es así que definimos el producto escalar canónico de los vectores $\mathbf{u} = (a, b, c)$ y el vector $\mathbf{v} = (d, e, f)$ como el número real calculado y denotado como

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = ad + be + cf;$$

También se puede calcular como : $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\ \mathbf{u}\ |\ |\ \mathbf{v}\ | \cos\theta$. Donde θ es el menor ángulo entre los dos vectores considerados. Si θ es un ángulo recto el $\cos\theta$ es cero, y, por consiguiente, el producto escalar nulo. Y, en este caso los vectores se dicen ortogonales.

Las propiedades del producto escalar de vectores del espacio E son las mismas que las que tiene el producto con vectores del plano.

El *módulo* de un vector es la longitud del vector.

Al módulo del vector **u** = (a, b, c) se lo representa ||**u**||, y se lo calcula

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

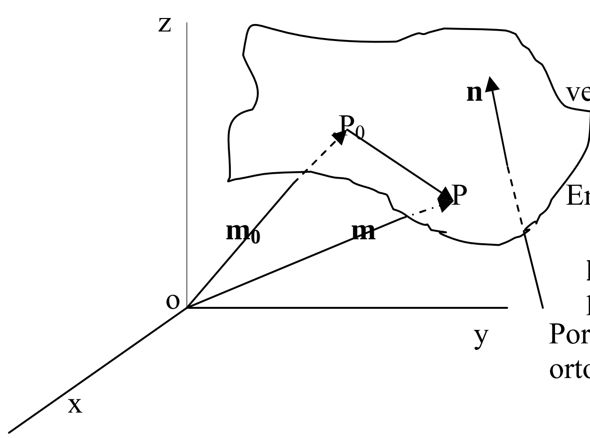
La *dirección* de un vector diferente de cero, está determinada por tres ángulos llamados *ángulos directores* del vector.

2.3.4. Ecuación del plano

El problema es: ¿cómo encontrar una ecuación vectorial que describa todos los puntos de un plano, conocidos un punto del plano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector n = (a, b, c) cuya dirección corte al plano en forma perpendicular?

Solución:

Un punto cualquiera del plano lo denotamos como P = (x, y, z)



Al punto P_0 le asociamos el vector $\mathbf{m}_0$, al punto P el vector **m**. Al vector que va de P_0 a P, como el vector $\mathbf{p_0p}$.
En la figura se debe observar que:
$\mathbf{m_0} + \mathbf{p_0p} = \mathbf{m}$, de donde
$\mathbf{p_0p} = \mathbf{m} - \mathbf{m_0}$ y es un vector del plano.
Por consiguiente $\mathbf{p_0p}.\mathbf{n} = 0$, por ser ortogonales (ecuación del plano).

Reemplazando por las componentes respectivas queda:

$$\boxed{(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)(a, b, c) = 0,}$$

si hacemos el producto escalar de estos dos vectores, obtenemos la ecuación general del plano.

2.3.5. Producto vectorial

El *producto vectorial* (o también *cruz*) es una operación entre vectores del espacio E = $\mathbf{R}^3$, tiene importantes aplicaciones en la geometría y en la física.

Si **a** y **b** son dos vectores no paralelos, entonces las representaciones de los dos vectores con el mismo origen determinan un plano. El resultado del producto vectorial de **a** y **b** es un vector perpendicular a dicho plano.

Definición

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces el producto vectorial de **a** y **b**, denotado **axb**, está dado por:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2;\ a_3b_1 - a_1b_3;\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

El vector **a x b** así calculado será normal (perpendicular) al vector **a** y al **b** es decir; tendrá que ser:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$, (pueden hacer las cuentas).

2.3.5.1. Las propiedades fundamentales del producto vectorial son:

$\forall \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$, $\forall r \in \mathbf{R}$ se tiene:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$(r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = r(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, satisfacen las relaciones:

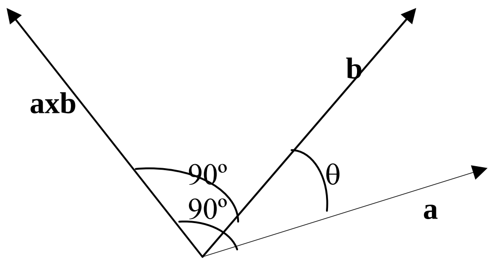
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0; \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i};$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j}; \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k}.$$

Una manera sencilla de recordar la definición de producto vectorial es ordenando los vectores unitarios **i, j**, **k** y las componentes de los vectores **a** y **b** en un determinante tres por tres, y desarrollando por los menores de la primera fila, de la siguiente forma:

$$\mathbf{axb} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$



Mas adelante se podrá probar que la norma del vector producto vectorial es igual a la norma del vector **a** por la norma del vector **b** por el seno del ángulo comprendido θ. Es decir:

$$\boxed{\|\mathbf{axb}\| = \|\mathbf{a}\| \,.\, \|\mathbf{b}\| \,.\, \text{sen}\ \theta.}$$

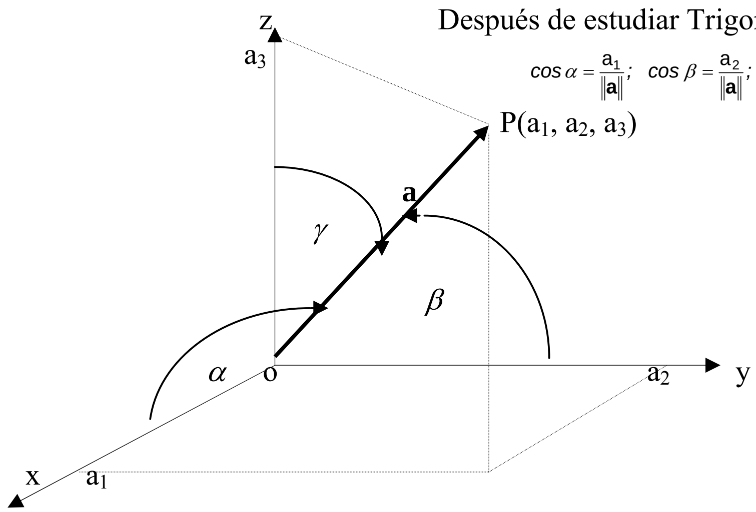
Conocido el producto vectorial el alumno podrá determinar a) la ecuación del plano, conocidos tres puntos del mismo. b) la ecuación del plano conocido dos puntos y un vector paralelo al plano.

2.3.6. Definición de ángulos directores

Los ángulos directores de un vector diferente de cero son los tres ángulos que tienen la menor medida en radianes no negativa α, β, *y* γ *medidos a partir de los ejes* x, y y z, *respectivamente hasta la representación de posición del vector.*

Después de estudiar Trigonometría, se podrá ver que:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|};\quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|};\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$$



Bibliografía:

-Apostol, Tom M. Calculus. Editorial Reverté, S.A.
-Donneddu, A. Curso de Matemática. Editorial Aguilar.
-Leithold, Louis. El Cálculo. OUP.
-Queysanne, Michel. Álgebra Básica. Editorial Vicens-Vives.

Ejercicios de entrenamiento

I) Vectores en R^2:

Ejercicio Nº1. Construya en cada uno de los siguientes casos el vector $\vec{a}$:
a) $\vec{a} = (2, 5) + (3, 7)$ b) $\vec{a} = (3, 7) + (2, 5)$ c) $\vec{a} = (3, 6) + (-2, 1)$
d) $\vec{a} = (3, 6) – (-2, 1)$ e) $\vec{a} = (3, 6) + 4(-2, 1)$ f) $(-6, 1) + \vec{a} = (2, 3)$

Ejercicio Nº2. Sean: $\vec{u} = (3, 2)$; $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (0, -5)$, hallar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ d) $(2\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $\vec{v} \cdot (\vec{u} - 3\vec{w})$

Ejercicio Nº3. Si $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, halle la longitud (norma) de:

a) $\vec{a}$ b) $\vec{b}$ c) $\vec{a} + \vec{b}$ d) $\vec{a} - \vec{b}$ e) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ f) $\vec{u} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Ejercicio Nº4. Diga cuáles son los pares de vectores ortogonales, dados:

$\vec{u} = (-2, 1)$; $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (0, 1/3)$; $\vec{t} = (-1/3, 0)$; $\vec{r} = (-3, 5)$

Ejercicio Nº5. Determine todos los vectores ortogonales a $\vec{a}$ que tienen la misma longitud que $\vec{a}$: a) $\vec{a} = (1, 0)$ b) $\vec{a} = (1, 1)$ c) $\vec{a} = (- 4, 5)$

II) Vectores en R^3:

Ejercicio Nº6. 1) Obtener el vector que une los puntos A = (1, - 2, 3) y B = (- 2, 1, 2) y expresarlo en la forma $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. 2) Calcular la distancia entre A y B.

Ejercicio Nº7. Dados los vectores: $\vec{a} = (-1, -1, 2)$ y $\vec{b} = (0, 2, 1)$, calcular un vector que sea ortogonal a ambos y cuyo módulo sea $\sqrt{2}$.

Ejercicio Nº8. En cada caso, halle un vector $\vec{U}$ de longitud 1 y paralelo a:

a) $\vec{u} - \vec{v}$ b) $\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$ c) $\vec{u} + 3\vec{v}$ si $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 6)$

Ejercicio Nº9. Dados los vectores: $\vec{u} = (0, 1, \sqrt{3})$ y $\vec{v} = (0, -1, 0)$, obtener el ángulo que forman.

Ejercicio Nº10. Calcular los cosenos directores de $\vec{v}$ cuando:

a) $\vec{v} = (1, 2, -2)$ b) $\vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

Ejercicio Nº11. Escribir la ecuación vectorial de la recta perpendicular a la recta dada $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}$ y que pasa por el punto (-2, 1).

GUÍA Nº2: *Álgebra Vectorial*

EJ.Nº1. Construya un sistema de coordenadas rectangulares y localice los puntos:

(1, 0), (0,1), (-1, -1), (1, 1), (-2, 0), $(0, -\frac{1}{2})$, (-5, 3); (5, -3); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0 , 1); (1, 2, 3), (2, -3, 0); (0, -2, 0); (-1, 0, 4).

Ej.Nº2. Represente gráficamente los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = \vec{i}$ b) $\vec{u} = \vec{j}$ c) $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ d) $\vec{v} = (-2, 1) + (2, 1/2)$ e) $\vec{v} = \frac{3}{2}(0, -2)$

f) $\vec{u} = (-3, 2) - (-2, -3)$ g) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ h) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ i) $\vec{u} = (0, 1, 0)$

j) $\vec{u} = (0, 0, 1)$ k) $\vec{v} = -\frac{1}{4}(-8, 0, 2)$ l) $\vec{v} = 2(3, 1, 2) - (1, 0, 1)$ m) $\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{k}$

EJ.Nº3. Sean $\vec{a}$ el vector (- 4, 5) y P el punto (6, -2). a) Dibuje el vector $\vec{a}$, tomando como punto inicial del vector el origen de coordenadas. b) represente a $\vec{a}$, tomando P como punto inicial del vector. c) Halle la **longitud** (norma o módulo) de $\vec{a}$.
Idem si $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y P = (0, 2, 1).

EJ.Nº4. Un vector $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, puede expresarse como: $\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta\,\vec{i} + |\vec{a}|\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$, siendo θ el ángulo que subtiende en sentido positivo (anti-horario) con respecto al eje OX. Entonces, expresar el vector $\vec{a} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$ en la forma precedente.

EJ.Nº5. 1) Dados los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, encontrar el vector que une $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ y el que une $\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1$, en formas gráfica y analítica.
2) Halle la **longitud** del vector $\vec{v}_{12}$.

3) La **distancia** entre los puntos P_1 y P_2, (extremos de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente) y entre P_2 y P_1, si : a) $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{v}_1 = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ y $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ c) $\vec{v}_1 = \vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{v}_2 = -\frac{3}{4}\vec{j}$

d) $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

EJ.Nº6. Resolver las siguientes **ecuaciones**:

a) $2(0, 3) + 8\,\vec{x} = (1, -7)$ b) $(3, -2) = \frac{1}{3}\vec{x}$ c) $-2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - \vec{x} = 3\,(6\,\vec{i} - \vec{j})$

EJ.Nº7. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, decir en cada caso si son **paralelos**:

a) (-6, -3) y (2, 1) b) $4\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$ y $-2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ c) (6, 2) y (-3, -1) d) (6, 2) y (0, 0)

d) $\vec{u} = (1, -2, 3)$; $\vec{v} = (-2, 4, -6)$ e) $\vec{u} = (-15, -21, -6)$; $\vec{v} = (5, 7, 2)$

EJ.Nº8. Encuentre |**a**| , **a** + **b**, **a** – **b** , 2**a** y 3**a** + 4**b.**

a) **a** = (5, -12), **b** = (-2, 8) b) **a** = (2, -3, 6), **b** = (1, 1, 4)
c) **a** = **i** + **j** + **k**, **b** = 2**i** – **j** + 3**k**

EJ.Nº9. Encuentre un **vector unitario** que tenga la misma dirección que el vector dado.

a) (1, 2) b) (3, -5) c) (-2, 4, 3) d) (1, - 4, 8) e) **i** + **j** f) 2**i** – 4 **j** + 7**k**

EJ.Nº10. Encuentre **a · b** (**producto escalar**).

a) **a** = (2, 5) , **b** = (-3, 1) b) **a** = (-2, -8), **b =** (6, - 4) c) **a** = (4, 7, -1), **b =** (-2, 1, 4)

d) **a** = 2**i** + 3**j** – 4 **k**, **b** = **i** – 3**j** + **k** e) |**a**| = 2, |**b**| = 3, el ángulo entre **a** y **b** es $\pi/3$.

f) Muestre que: **i · j = j · k = k · i =** 0 g) Muestre que: **i · i = j · j = k · k =** 1.

EJ.Nº11. Determine el ángulo entre los vectores **a** y **b**.

a) **a** = (1, 2, 2), **b =** (3, 4, 0) c) **a** = 6**i** – 2**j** – 3**k**, **b** = **i + j + k**
b) **a** = (1, 2), **b** = (12, -5) d) **a** = **i** + **j** + 2**k**, **b** = 2**j** – 3**k**

EJ.N12. Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos, o ninguna de las dos cosas.

a) **a =** (2, - 4), **b** = (-1, 2) d) **a =** (2, 3, -3), **b** = (-1, 2, 5)

b) **a =** (2, - 4), **b** = (4, 2) e) **a =** (- 1, 5, 2), **b** = (4, 2, -3)

c) **a =** 3**i** + **j** – **k**, **b** = **i** – **j** + 2**k** f) **a =** 2**i** + 6**j** – 4**k**, **b** = -3**i** – 9**j** + 6**k**

EJ.Nº13. Encuentre los valores de x tales que los vectores dados sean ortogonales.

a) $x\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\quad x\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ $\qquad$ b) $x\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j}$, $\quad x\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ $\qquad$ c) $(x, 1, 2)$, $(3, 4, x)$.

EJ.Nº14. Dado el vector $\vec{u} = (1, 2)$, encuentre un vector perpendicular al mismo cuya longitud sea $\sqrt{5}$. Grafique.

EJ.Nº15. Calcular los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\vec{v}$.

a) $(1, 2, 2)$ $\qquad$ b) $-8\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ $\qquad$ c) $(2; 1.2; 0.8)$

EJ.Nº16. Determine el **producto vectorial** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

a) $\mathbf{a} = (1, 0,1)$, $\quad \mathbf{b} = (0, 1, 0)$ $\qquad$ c) $\mathbf{a} = (-2, 3, 4)$, $\quad \mathbf{b} = (3, 0, 1)$

b) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ $\qquad$ d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

EJ.Nº17. Sean : $\vec{u} = (3, -2, 4)$; $\vec{v} = (2, 5, -1)$ y $\vec{w} = (0, 3, 1)$. Halle:
a) $\vec{u} + \vec{v}$ $\quad$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ $\quad$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $\quad$ d) $\vec{u} \times \vec{v}$ $\quad$ e) $\|\vec{w} + \vec{u}\|$ $\quad$ f) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
g) $\|2\vec{w} - \vec{v}\|$ $\quad$ h) $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$ $\quad$ i) $\vec{u} \cdot (-3/4\ \vec{v})$ $\quad$ j) $\vec{v} \times \vec{v}$ $\quad$ k) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$

EJ.Nº18. Determine el vector $\vec{U}$ de longitud 1, ortogonal a la vez a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, si:

a) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\qquad$ b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ y $\vec{v} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

EJ.Nº19. Calcule el área del paralelogramo con vértices: P(0, 0, 0), Q(5, 0, 0), R(2, 6, 6), y S(7, 6, 6).

EJ.Nº20. Dados los vértices A, B, C, tales que $A = (1, \alpha, 0)$, $B = (3, 0, 1)$ y $C = (0, -5, 2)$, determinar el valor de α para que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

EJ.Nº21. Calcule el **producto mixto** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, dados:

a) $\vec{u} = (2, 3, 1)$; $\quad \vec{v} = (3, -7, 5)$; $\quad \vec{w} = (1, -5, 2)$
b) $\vec{u} = (2, -1, 2)$; $\quad \vec{v} = (1, 2, -3)$; $\quad \vec{w} = (3, -4, 7)$

Ej.Nº22. Encuentre el volumen del paralelepípedo ($V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$), determinado por los vectores $\mathbf{a} = (1, 0, 6)$, $\mathbf{b} = (2, 3, -8)$ y $\mathbf{c} = (8, -5, 6)$.

Aplicaciones del Álgebra Vectorial.

Ej.Nº23. a) Obtener la **ecuación vectorial de la recta** que pasa por el punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

b) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_o paralela a $\vec{v}$ si:

i) $P_o = (2, -1)$ y $\vec{v} = (-4, 3)$ ii) $P_o = (1, 3)$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$

iii) $P_o = (3, -1, 8)$ y $\vec{v} = (2, 3, 5)$ iv) $P_o = (2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$

EJ.Nº24. Determine la **ecuación cartesiana** de la recta, dados:

a) $P_o = (-3, 2)$, $m = \frac{1}{2}$ b) $P_o = (3, -2)$, $P_1 = (1, 5)$ c) $P_o = (2, 4)$, $\vec{v} = (4, -2)$

Ej. Nº25. 1) Obtener la **ecuación del plano** que pasa por $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ y tiene como vector normal a $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

2) Hallar la ecuación del plano que pasa por $P_o = (1, 2, 3)$ normal a $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y la ecuación del plano que pasa por $P_o = (1, 2, 3)$; $P_1 = (4, 2, -1)$, $P_2 = (-3, 0, 1)$.

Funciones reales

Unidad 3

Comentario:

La idea de aplicación, y en particular la de función numérica, es uno de los conceptos más fundamentales de la matemática.

En este curso de Primer año de las Carreras de Farmacia, Bioquímica, como asimismo del Profesorado en Biología y la Licenciatura en Genética, se desarrolla el tema con un enfoque actual, y con el lenguaje habitual de los libros disponibles en la bibliografía de nivel universitario.

Por otra parte, los requerimientos necesarios para el estudio son los conocimientos adquiridos en el nivel secundario y en el repaso que el alumno ha realizado, según los contenidos dados en el Apunte de Matemática para el Ingresante a la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de esta Universidad.

Sin dudas, el presente trabajo deberá servir como una guía de estudios para el alumno, y será un complemento de las Clases teóricas y de los libros señalados en la "Bibliografía".

El contenido seleccionado es:

III- Funciones reales

Definición. Propiedades. Álgebra de funciones. Representaciones gráficas. Funciones monótonas, pares, impares y periódicas. Funciones circulares. Funciones exponencial y logarítmica.

3. Funciones

3.1. Introducción

El término "función", siempre está presente en la vida cotidiana, por ejemplo cuando decimos:

*- La concentración plasmática de un medicamento puede ser *función* de la dosis administrada (o de la velocidad de eliminación).

*- La dilatación de una varilla metálica es *función* de la temperatura.

La fórmula de Mole permite determinar el peso "ideal" P(Kg) de un hombre adulto a partir de su talla T(cm) según:

$$\mathbf{P = T - 100 - \frac{1}{4}(T - 150)}$$

T es una "variable" que toma sus "valores" (numéricos) en un conjunto de números (entre 160 y 200) en general; a cada valor de T, la expresión hará corresponder "uno y solo un valor de P". (por ej. T = 178 $\rightarrow$ P = 71).

Inversamente nosotros podemos determinar a qué talla le corresponde un peso P dado, por ej. P = 80 $\rightarrow$ T = 190. Esta será la noción de "función inversa o recíproca".

Por último, a título de curiosidad, señalamos que para una mujer adulta la fórmula análoga, dada por Lorentz, es:

$$\mathbf{P = T - 100 - \frac{1}{2{,}5}(T - 150)}$$

3.2. Noción de función o aplicación numérica

El concepto de Aplicación en general se define como una correspondencia, (o relación) entre elementos de dos conjuntos cualesquiera; nosotros, en este punto de nuestro estudio, tomaremos dos subconjuntos de números reales, más precisamente consideramos una parte D de números reales y un conjunto C de números reales.

Definiciones

Cualquier relación (que llamaremos f) de un conjunto $D \subset \mathbf{R}$ en $C \subset \mathbf{R}$, decimos que es una función si:

- A todo elemento del conjunto D, f le hace corresponder algún elemento de C.

- Cada elemento del conjunto D está relacionado con un único elemento del conjunto $C \subset \mathbf{R}$.

Es decir: se denomina ***función*** de $D \subset \mathbf{R}$ en $C \subset \mathbf{R}$ a toda relación f que denotamos:

$$\begin{aligned} f: D &\to C \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

que verifique:

$$\forall x \in D, \exists!\, y \in C \subset \mathbf{R} \quad \text{tal que} \quad y = f(x)$$

que leemos:

Para todo número real "x" perteneciente a D, existe uno y solo un número real "y" tal que "y es igual a f de x". Al conjunto C llamamos Dominio y al conjunto C Codominio, de manera más general tomaremos a $C = \mathbf{R}$:

La expresión $y = f(x)$, nos asegura que x está relacionado con y según la función f.

Cuando D y C son partes del conjunto $\mathbf{R}$, decimos que f es una función real de variable real.

Cuando D es un conjunto de números naturales diremos que f es una función real de variable natural. Etc.

3.2.1. Dominio de una función

Se denomina ***dominio*** de una función al conjunto sobre el cual está definida la función. También suele ser referido como campo de existencia o campo de definición de la función f.

$$f: D \subset \mathbf{R} \to C \subset \mathbf{R}$$

Decimos el conjunto D es el *dominio* y el conjunto C es el *codominio* de la función f.

Definir una función consiste en dar el dominio (subconjunto de **R**) y dar el elemento que le corresponde a cada elemento del dominio, esto suele indicarse diciendo "dar la *imagen* de cada elemento del dominio" (número real). Para el caso que estamos estudiando, funciones reales de variable real, la práctica más usual será indicar mediante una expresión analítica la manera de determinar la imagen de un elemento cualquiera del dominio, y a la que llamaremos "*regla de correspondencia*".

Y, en este caso para determinar el dominio de f se deberá considerar el mayor subconjunto de **R** para el cual, dicha expresión analítica tenga sentido.

Ejemplo:

$x \rightarrow y = f(x) = \frac{1}{x}$, su dominio es $D = \mathbf{R} - \{ 0 \}$, ya que la expresión $\frac{1}{0}$ carece de sentido.

3.2.2. Imagen de una función

Sea $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ El ***conjunto imagen*** de una función (imagen) es un subconjunto de números reales denotado f(D), formado por todos los números reales que son imágenes por f de los elementos del dominio D

$$f(D) = \{y \in \mathbf{R} / \ \exists x \in D \ \text{ tal que } \ y = f(x)\}$$

o sea el conjunto de las imágenes (o de valores) de todos los elementos del dominio.

3.2.3. Gráfica de una función

Dada $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, f también queda definida por un conjunto de pares ordenados (x, f(x)), con $x \in D$ y $f(x) \in f(D)$ y por lo tanto puede representarse graficamente como puntos de $\mathbf{R}^2$. A dicha representación se le denomina *gráfica de f.*
O sea:
Dado un sistema de referencia de dos ejes ortogonales del plano. El par ordenado (x, f(x)) está asociado a un punto M del plano, de abscisa x y ordenada f(x): la gráfica de f es el conjunto de puntos [pares ordenados (x, f(x)], cuando x recorre D.

Al conjunto de todos los pares ordenados (x, f(x)) se le denomina ***Grafo de la función***, se lo puede denotar:

$$\text{Grf} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / \ y = f(x)\}.$$

Observación. El sistema de referencia es *ortogonal*, si los ejes son perpendiculares, es *ortonormal* si los ejes son perpendiculares y si los vectores unitarios de cada eje son de la misma longitud (misma norma).

3.3. Diversas maneras de definir una función

a) A partir de una tabla de valores

Ej. Alargamiento de un resorte en términos del peso colgado en uno de sus extremos.

Carga (N)	50	100	150	200	250
Alargamiento	20	41	59	80	95

La construcción gráfica de esta función está constituída por puntos aislados ya que la variable (carga) no puede tomar más que valores aislados. En este ejemplo no se conoce la expresión analítica de la función.

b) A partir de una fórmula explícita

$t \to i(t) = A \text{ sen } \omega t$ nos dá la intensidad de una corriente alterna sinusoidal de amplitud A y de frecuencia ω dada.

c) A partir de una relación algebraica

$x \to f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$; esta función está definida sobre $D = \mathbf{R} - \{2\}$, pero además se puede observar que la expresión analítica se puede simplificar, siempre que x sea distinto a 2 y reescribirla como $f(x) = (x + 2)(x^2 + 4)$ (para $x \neq 2$).

d) A través de una curva representativa

Por ejemplo la traza de un registrador de la presión atmosférica o de la temperatura en término del tiempo. Estas curvas en general no se van a corresponder con una expresión simple.

e) A partir de una construcción geométrica

Por ejemplo, las funciones trigonométricas.

f) A partir de sus propiedades

Por ejemplo la función exponencial.

3.4. Álgebra de las funciones reales

Vamos a denotar F(**R**), al conjunto de todas las funciones definidas de **R** a **R,** en ese conjunto se pueden considerar las siguientes operaciones o leyes de composición internas en F(**R**).

1. *Suma de funciones*

Sean dos funciones cualesquiera $f, g \in F(\mathbf{R})$, o sea:

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow f(x)$

$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow g(x);$

se define la función suma como:

$f + g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2. *Producto de funciones*

Sean dos funciones cualesquiera $f, g \in F(\mathbf{R})$, o sea:

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow f(x)$
$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow g(x);$ se define la función producto como:

$f \cdot g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3. *Composición de funciones*

Sean dos funciones cualesquiera $f, g \in F(\mathbf{R})$, o sea:

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow f(x)$

$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow g(x);$

se define la compuesta como:

$f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow (f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Asimismo, se define una ley de composición externa (producto por un escalar)

4. *Producto de un escalar (número real) por una función*

Sea una función cualquiera de $F(\mathbf{R})$, y un escalar cualquiera λ (número real), es decir:

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow f(x)$; se define una nueva función denotada:

$\lambda f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$ con $x \rightarrow (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

El conjunto $F(\mathbf{R})$ dotado de las operaciones suma y producto tiene una estructura de anillo, dotado de la suma y el producto por un escalar tiene estructura de espacio vectorial y dotado de la composición tiene estructura de semigrupo con elemento unidad.

Para funciones cuyo dominio no es todo **R** también se pueden definir las anteriores leyes de composición de igual manera.

Ha de tenerse cuidado al determinar el dominio de la función resultante en cada operación. Así pues, se destacan las siguientes consideraciones:

- Los dominios de las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ coinciden y son las intersecciones de los dominios de f y g.

- Una función f y su opuesta $(- f)$, tienen el mismo dominio.

- El dominio de la función f / g respecto al producto de $f \cdot g$ es el dominio de $f \cdot g$ menos los valores donde g se anula.

- El dominio de la función $g \circ f$ es el de la función f menos los valores $x_0 \in D_f$ tales que $f(x_0) \notin D_g$.

PROPIEDADES

- ### Inyectividad

Dada una función $f: D \to C$, decimos que es *inyectiva*, si y solamente si, a elementos distintos del dominio D, le corresponden imágenes distintas en el codominio C, es decir:

$$\forall x, x' \in D,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

O su expresión equivalente:

$$\forall x, x' \in D,\quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- ### Sobreyectividad

Dada una función $f: D \to C$, decimos que es *sobreyectiva*, si y solamente si, cualquiera que sea el elemento y, del codominio C, existe al menos un antecedente o preimagen x, en el dominio D. Es decir

$$\forall y \in C, \exists x \in D,\ y = f(x)$$

- ### Biyección

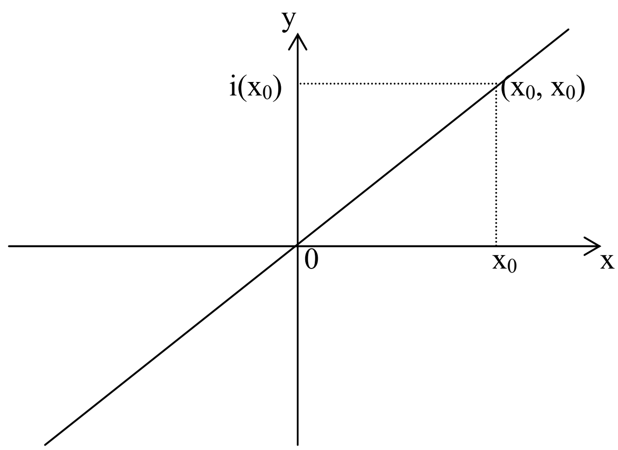
Si una función es a la vez inyectiva y sobreyectiva decimos que es *biyectiva*.

3.4.1. Función identidad

La función denotada i, definida de la siguiente manera:

$$i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{con} \quad x \rightarrow i(x) = x$$

la llamamos ***función identidad*** (o coincidencia) sobre **R.** Tiene por gráfica a:



3.4.2. Función inversa

Dadas dos funciones reales de variable real f y g y si $f \circ g = i$, (identidad sobre el dominio de g) decimos que la función g es la función *inversa de f* y la denotamos $f^{-1} = g$; o también que f es la inversa de g, es decir será $g^{-1} = f$.

Es decir toda vez que hacemos la composición de una función con su inversa el resultado es una función identidad.

O sea, tendremos:

$$f \circ f^{-1} = i, \quad \text{(identidad sobre } Df^{-1}\text{)} \text{ y}$$
$$f^{-1} \circ f = i \quad \text{(identidad sobre } Df\text{).}$$

Muchas veces el problema que se plantea es determinar la función inversa de una dada. Para que la función tenga inversa tendrá que ser biyectiva.

OBSERVACIÓN

No existe un procedimiento determinístico de la función inversa de una función dada, si bien existen estrategias. Una estrategia muy útil en el caso de que la función se exprese analíticamente mediante una expresión explícita, $y = f(x)$, consiste en despejar la variable x desde la expresión $y = f(x)$, e intercambiar la variable y por la variable x en la expresión obtenida.

Ejemplo:

Determinar la función inversa de la función dada por: $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

Solución:

* La expresión $\frac{x+3}{x+2}$ no tiene sentido si $x + 2 = 0$, por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$$

$$f : \mathbf{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbf{R}$$

Para determinar su inversa se considera la expresión:

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

y se despeja x en términos de y

$$y = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow y \cdot (x + 2) = x + 3 \Rightarrow y \cdot x + 2y = x + 3 \Rightarrow y \cdot x - x = 3 - 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3-2y}{y-1}$$

así pues, se considera la función:

$$g : \mathbf{R} - \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = \frac{3-2x}{x-1}$$

Dado que g no está definida en $x = 1$, se debe observar que $f(x)$ nunca toma el valor 1.

El alumno deberá verificarlo y además deberá probar que $(f \circ g)(x) = x$ y que $(g \circ f)(x) = x$.

3.5. Monotonía de una función

Sea f una función numérica definida sobre un conjunto D ($D \subset \mathbf{R}$) e I, J y K intervalos de D:

Sea f definida $\forall x \in D$

- si $\forall x_1 \in I$ y $x_2 \in I$ ($I \subset D$), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  decimos, f es **<u>creciente</u>** sobre I

- si $\forall x_1 \in J$ y $x_2 \in J$ ($J \subset D$), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  decimos, f es **<u>decreciente</u>** sobre J.

- $\forall x_1 \in K$ y $x_2 \in K$ ($K \subset D$), $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2$
  decimos, f es **<u>constante</u>** sobre K

Una función creciente (o decreciente) sobre un intervalo G de E se dice **<u>monótona sobre G</u>**

Por ejemplo:
-La función lineal $x \rightarrow ax$ es creciente sobre **R** si $a > 0$ y decreciente sobre **R**, si $a < 0$.
-La función afin $x \rightarrow ax + b$ es creciente sobre **R** si $a > 0$ y decreciente sobre **R**, si $a < 0$.

-La función $x \to 1/x$, es decreciente sobre $\mathbf{R}_{-}^{*}$ y sobre $\mathbf{R}_{+}^{*}$.
-La función $x \to \operatorname{sen} x$ es creciente en $[0; \pi/2]$ y decreciente en $[\pi/2; \pi]$.

3.6. Paridad y periodicidad

Definiciones:

Sea f definida $\forall x \in E$, $(E \subset \mathbf{R})$

- si $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$ f se dice **par.**
- si $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$ f se dice **impar.**
- si $\exists\, t \in \mathbf{R}$ tal que $\forall x \in E$, $f(x + t) = f(x)$ f se dice **t-periódica.**

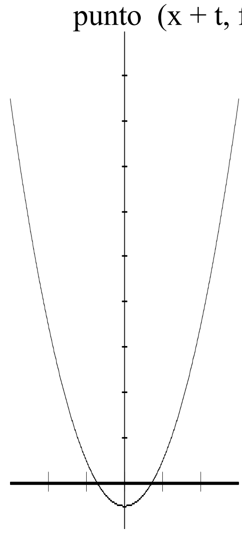
Por ejemplo:

$x \to x^2 + 4$ es una función par definida sobre $\mathbf{R}$.
$x \to 5x^3 - 7x$ es una función impar definida sobre $\mathbf{R}$.
$x \to x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ es una función definida sobre $\mathbf{R}$ que no es ni par ni impar. (La imparidad no es la negación de la paridad).
$x \to \operatorname{sen} x$ es una función impar, 2π - periódica definida sobre $\mathbf{R}$.
$x \to \cos x$ es una función par, 2π - periódica definida sobre $\mathbf{R}$.
$x \to \tan x$ es una función impar, π - periódica definida sobre:

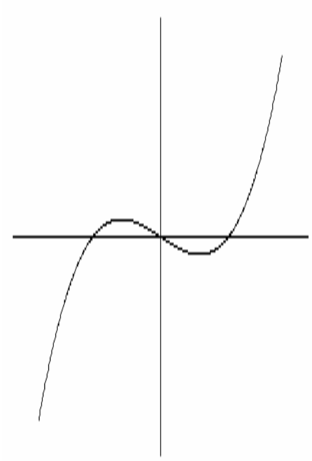
$$\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

3.6.1. Propiedades de la gráfica:

- si **f es par**, el eje **Oy** es eje de simetría de la gráfica
- si **f es impar**, el origen **O** es centro de simetría de la gráfica
- si **f es t-periódica**, y $(x, f(x))$ es un punto de la gráfica, entonces el punto $(x + t, f(x))$ también es un punto de la gráfica, pues $f(x+t) = f(x)$.



Función par



Función impar

3.6.2. Consecuencias prácticas:

La paridad o la periodicidad de una función simplifica su estudio:

- Si f es par, se estudia sus variaciones sobre $\mathbf{R}_+$ y se completa su estudio por simetría respecto al eje **Oy**;
- Si f es impar, se estudia sus variaciones sobre $\mathbf{R}_+$ y se completa su estudio por simetría respecto al origen de coordenadas **O**;
- Si f es t-periódica, se estudia sus variaciones sobre un intervalo de amplitud t.

3.7. Funciones acotadas

- Decimos que la función $f: D \to \mathbf{R}$ está **acotada superiormente** si existe una constante M tal que: $\forall\ x \in D$, $f(x) \leq M$. Es decir M es un mayorante [M = sup f(D)].
- Decimos que la función $f: D \to \mathbf{R}$ está **acotada inferiormente** si existe una constante m tal que: $\forall\ x \in D$, $f(x) \geq m$. Es decir m es un minorante [m = ínf f(D)].
- Si la función está acotada superiormente e inferiormente, decimos que f es una función **acotada.**

Por ejemplo:

Sabemos que, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ para todo número real x, por consiguiente la función. $x \to \text{sen } x$, está acotada inferiormente por -1 y superiormente por 1, es decir es una función acotada. Se puede observar además que la función x ∏ cos x también lo será.

La función $x \to (x + 1)^2$ está acotada inferiormente por el 1, y el intervalo $]-\infty, 1]$, es el conjunto de las cotas inferiores y, no está acotado superiormente.

3.8. Funciones circulares

3.8.1. Ángulos

En este punto, se considera que el alumno que ingresa a la Facultad, tiene incorporado el concepto de ángulo, por lo menos la idea intuitiva del mismo. Aquí solo hacemos una pequeña referencia, ya que para desarrollar el mismo, se necesitaría por lo menos desarrollar algunos aspectos de la Geometría Euclidiana, que escapan al nivel del curso. El alumno que se encuentre interesado en estudiar con profundidad el tema, tendrá que remitirse a la amplia bibliografía que existe sobre el tema.

Un *ángulo* (en el plano), denotado por $(d_\alpha; d_\beta)$, consiste en dos semirrectas d_α y d_β con un punto final común y una rotación que lleva d_α sobre d_β. Al punto común se le llama vértice del ángulo; a la semirrecta d_α se le llama lado inicial y a la d_β lado terminal del ángulo. Como la rotación tiene una dirección y por lo tanto se le puede asignar una medida y un signo, el ángulo queda "orientado". A esta medida de la rotación se le llama la medida del ángulo y la denotaremos inicialmente por el número real x.

Vamos a decir que el ángulo es positivo, si su rotación es contra reloj. En caso contrario decimos que el ángulo es negativo. Se denota gráficamente por un arco con la cabeza de flecha sobre el lado terminal del ángulo.

Nosotros vamos a considerar, por conveniencia, a un ángulo con su vértice en centro del círculo de radio 1. Luego se podrá extender a círculos de radio cualquiera. Tenemos entonces, a **o** el centro del círculo unidad; a α y β puntos sobre el círculo unidad. Los segmentos $\mathbf{o}\alpha$ y $\mathbf{o}\beta$ tienen longitud 1. Por rotación de d_α alrededor del origen **o**, hasta que coincida con d_β, construimos el ángulo $(d_\alpha; d_\beta)$, (muchas veces denotado también $<\alpha\mathbf{o}\beta$), con medida x.

Bibliografía:

Allendöerffer; Oakley (ver en Biblioteca).
Taylor; Waade, Matemáticas Básicas, (ver en Biblioteca).

3.8.2. Medida de Ángulos

Definición:

Medir los ángulos es construir una aplicación μ: $R_1 \rightarrow \mathbf{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

1) u es un elemento diferente de 0 y elegido de una vez y para siempre en R_1 y denominado Unidad de Medida, se tiene:

$$\mu(u) = 1.$$

2- Cualesquiera que sean x e y de R_1, se tiene, cada vez que:

$$x + y \in R_1$$

$$\mu_{(x+y)} = \mu_{(x)} + \mu_{(y)}$$

3.8.3. Número π

Para definir la longitud de un círculo se inscribe en el círculo un polígono regular de n lados luego se mide el perímetro por el número real p_n, y se le circunscribe a este círculo un polígono regular de n lados luego se mide el perímetro por el número p'_n. Se obtiene de esta manera dos sucesiones (p_n) y (p'_n) adyacentes, la primera creciente y la segunda decreciente. El número real

$$l = \lim_{n\to\infty} p_n$$

es la medida por definición de la longitud del círculo.

Si de es el diámetro, de denota π al número real

$$\pi = \frac{l}{d}\pi$$

Este número π es el mismo para todos los círculos y es un número irracional. Su valor decimal aproximado por defecto, con error menor que $1/10^5$:

$$\pi = 3{,}14159.$$

En todo lo que sigue, se medirán a los ángulos eligiendo por unidad, el radián.

3.8.4. Radián

Recibe el nombre de *radián* la unidad de ángulos tal que la medida del ángulo llano sea el número π. En lo que sigue mediremos los ángulos en radianes.

3.8.5. Seno y coseno

Se supone que el alumno estudió estos conceptos en la enseñanza media y lo recordó durante el curso de nivelación del ingreso a la Facultad, lo que sigue es, entonces, un pequeño resumen, sin muchas pretensiones.

Sea U el círculo unidad en el plano P. (Ver Unidad 2).

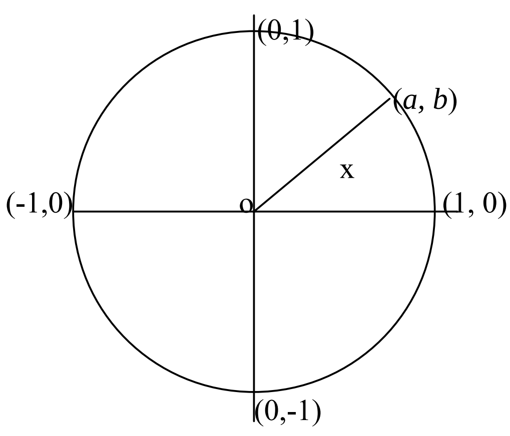


Fig. 1.

Definición:

Sean las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \text{Cos: } &\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \\ &x \to \cos x = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen: } &\mathbf{R} \to \mathbf{R}. \\ &x \to \operatorname{sen} x = b \end{aligned}$$

En la Fig. 1 se ha dibujado un círculo de radio 1, centrado en el origen de un sistema de coordenadas rectangular, hemos considerado un punto cualquiera del círculo de coordenadas (a, b), que determina un ángulo x medido en radianes, de esa manera quedan definidas simultáneamente dos aplicaciones reales de variable real, llamadas coseno y seno de acuerdo con el esquema mostrado, en consecuencia: el número *a* es el cos x , el número *b* es el sen x.

La ecuación del círculo de radio uno, centrado en el origen viene dado por $a^2 + b^2 = 1$, cualquiera sea el punto (a, b), en consecuencia se tiene:

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Esta es la fórmula fundamental de la trigonometría.

Esta fórmula nos prueba que $x \to \cos x$ y $x \to \operatorname{sen} x$, aplican al conjunto de los números reales sobre el intervalo [-1, +1].

Si tomamos un número $a \in [-1, +1]$, le corresponderá al menos un número b tal que $a^2 + b^2 = 1$.

Además, cualquiera sea el número a del intervalo [-1, +1], es imagen de un x de **R** por la función coseno. Esto quiere decir que la función coseno es una sobreyección del conjunto de los reales sobre el intervalo [-1, +1]. Lo mismo sucede con la función seno.

Estas funciones no son inyectivas, ya que dos números distintos x y x', congruentes módulo 2π, tienen el mismo coseno y el mismo seno:

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x.$$

Se dice entonces que las funciones coseno y seno, son *funciones periódicas* de *período 2π.*

3.8.6. Tangente y contangente

El conjunto de los números reales para los cuales la función *coseno* se anula es la siguiente:

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in Z} .$$

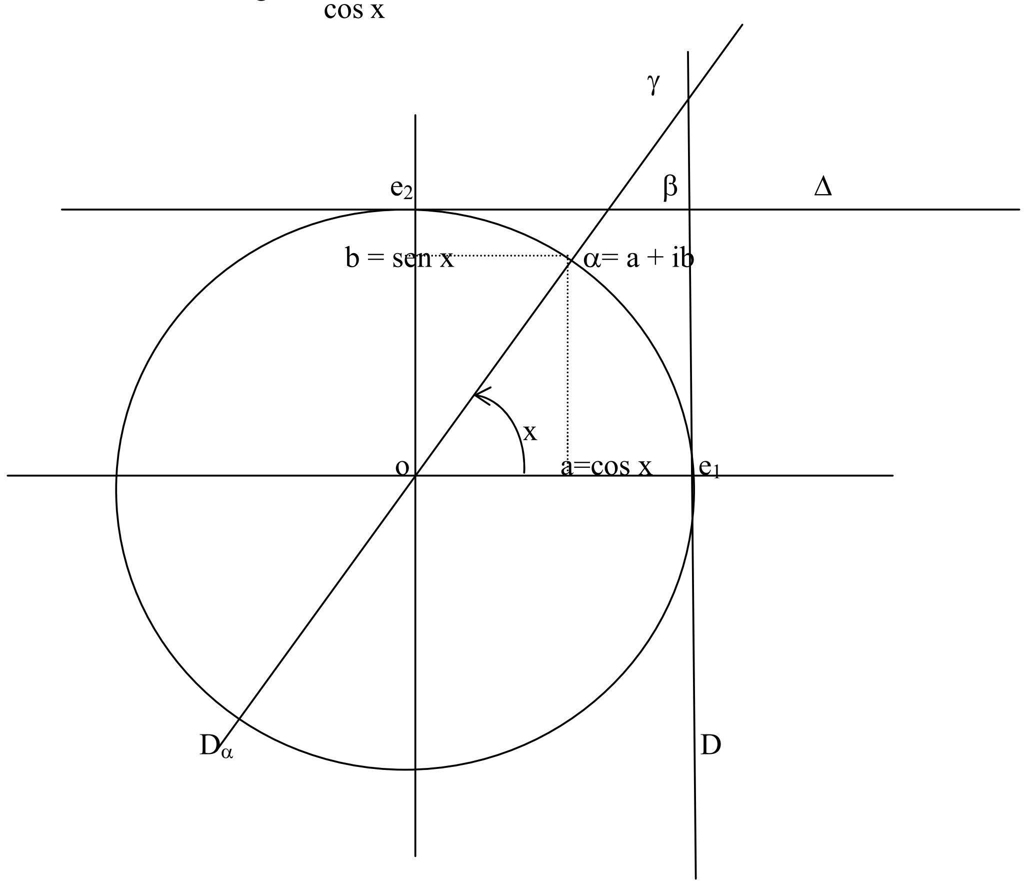
Designemos por A al complementario de este conjunto en R:

$$A = \bigcup_{k \in Z} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$$

Definición:

Se llama tangente a la aplicación de A en **R**, denotada tg, siguiente:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} .$$



Consideremos, de acuerdo al dibujo de arriba, la tangente D sobre el círculo unidad en el punto e_1, y el punto $\alpha\in\mathbf{U}$ correspondiente de x, para todo $x\in A$. La recta vectorial D_α corta a la recta tangente D en el punto γ y tg x es la ordenada de γ en $\{e_1, e_2\}$.

Ahora, el conjunto de números reales para los cuales la función *seno* se anula es la siguiente: $\{k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$.

Designemos por B el complementario de este conjunto en **R**:

$$B = \bigcup_{k\in Z}]k\pi; (k+1)\pi[$$

Definición:

Se llama cotangente a la siguiente aplicación de B en **R**, denotada cotg:

$$\text{cotg x} = \frac{\cos x}{\text{sen x}}$$

Sea Δ la tangente al círculo unidad en el punto e_2 de la figura. A todo $x\in B$, le corresponde un punto $\alpha\in\mathbf{U}$. La recta vectorial D_α corta a Δ en un punto β y la cotg x es la abscisa de el punto β en $\{e_1, e_2\}$.

Es de hacer notar que la fórmula fundamental nos da inmediatamente:

$$(\forall x\in A) \qquad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

$$(\forall x\in B) \qquad 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x}.$$

3.9. Fórmulas relativas a los ángulos asociados

Por simetría en torno de D_{e1}, se obtiene:

$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x,$$
$$\text{tg}(-x) = -\text{ tg } x.$$

Por simetría en torno de D_{e2}:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x,$$
$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x,$$
$$\text{tg}(\pi - x) = +\text{tg } x.$$

Por simetría alrededor de O, se tiene:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{tg}(\pi + x) = +\operatorname{tg} x.$$

Esta última relación prueba que $x \to \operatorname{tg} x$ (y también $x \to \operatorname{cotg} x$) es periódica y de periodo π.

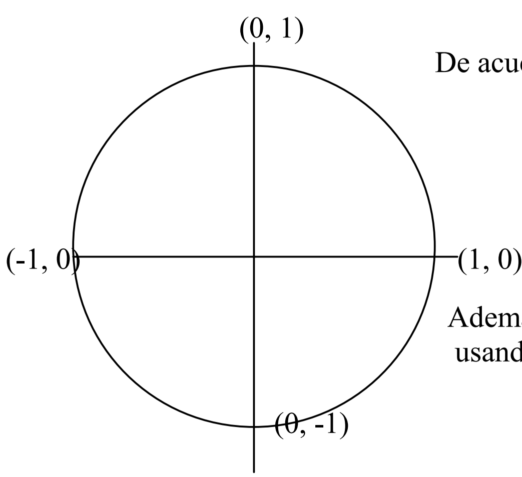
Por último, por simetría alrededor de la bisectriz $\left(d_{e_1}, d_{e_2}\right)$:

$$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(\pi/2 - x) = \operatorname{cotg} x.$$

3.10. Valores de las funciones trigonométricas

Si bien los valores de las funciones trigonométricas las podemos obtener mediante el uso de la calculadora, los valores obtenidos son en general números irracionales.

Con el objeto de lograr exactitud en el cálculo es útil conocer los valores exactos de cos x, sen x, tag x,...cuando $x = 0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; y $\frac{\pi}{2}$.



De acuerdo a las definiciones de la función seno y de la función coseno, se puede observar en el círculo unidad que:

$\cos 0 = 1$; $\operatorname{sen} 0 = 0$

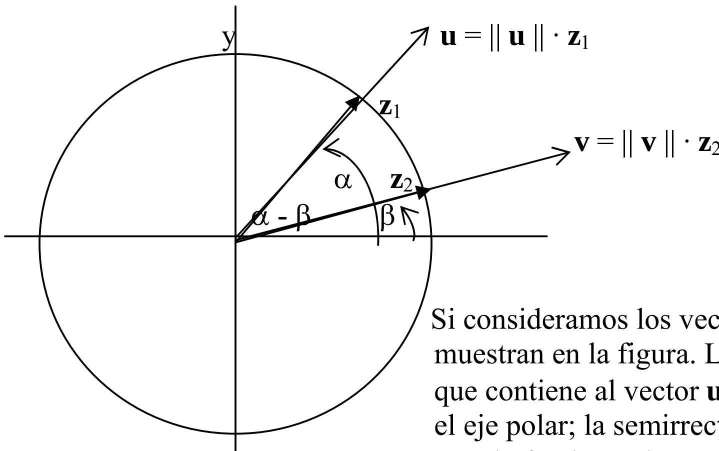
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$\operatorname{tag} 0 = 0$; $\operatorname{tag} \frac{\pi}{2}$ no está definida

Además, el alumno puede determinar los valores usando la figura, los valores del sen, cos, tan, de π, $3/2\ \pi$ y 2π.

3.11. Fórmulas trigonométricas de adición

En el punto 2.2.4 de la pág. 40 se ha estudiado la expresión trigonométrica del producto escalar de dos vectores como igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo comprendido, es decir dados **u** y **v** dos vectores del plano: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos\theta$, siendo θ, el menor ángulo comprendido.



Si consideramos los vectores **u** y **v**, como se muestran en la figura. La semirrecta vectorial que contiene al vector **u** forma un ángulo α con el eje polar; la semirrecta que contiene al **v** un ángulo β; el ángulo comprendido entre los dos vectores es entonces $\alpha - \beta$.

Como $\mathbf{z}_1 \in U$ y $\mathbf{z}_2 \in U$, sus coordenadas serán:

$$\mathbf{z}_1 = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \text{ y } \mathbf{z}_2 = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) \text{ y entonces:}$$

$$\mathbf{u} = \| \mathbf{u} \| \cdot \mathbf{z}_1 = \| \mathbf{u} \| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \| \mathbf{v} \| \cdot \mathbf{z}_2 = \| \mathbf{v} \| \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

El producto escalar es: (ver Unidad II: expresión trigonométrica del producto escalar).

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos(\alpha - \beta), \qquad \text{donde } \alpha - \beta \text{ es el ángulo comprendido}$$

$$\| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \cos(\alpha - \beta) = \| \mathbf{u} \| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

Simplificando,

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

y haciendo el producto escalar:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

Si tomamos $-\beta$ en lugar de β en la fórmula (1), y recordando que el $\cos\beta = \cos(-\beta)$ y que el $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(-\beta)$; podemos escribir:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta} \qquad (2)$$

Como el cos $(\pi/2 - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$, podemos aplicar la (1) al

$$\cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] = \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] = \cos[(\pi/2 - \alpha) - \beta)] = \cos(\pi/2 - \alpha) \cdot \cos\beta + \text{sen}(\pi/2 - \alpha) \cdot \text{sen}\ \beta$$

es decir:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\ \beta} \qquad (3)$$

Por último, reemplazando β por $-\beta$ en la fórmula (3) tenemos:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\ \beta} \qquad (4)$$

De las relaciones anteriores resulta:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta}{1 - \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta} \quad \text{y} \quad \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta}{1 + \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta}$$

Se propone como ejercicio determinar las relaciones similares correspondientes a las demás funciones circulares.

Tomando $\alpha = \beta$ se obtienen las fórmulas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\ \text{sen}^2\alpha$$
$$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cos\alpha$$

También se puede ver que:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\ \text{sen}^2\alpha$$

3.12. Fórmulas de transformación

De las anteriores relaciones, vamos a deducir las siguientes fórmulas de transformación de sumas en productos.

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos p - \cos q = -2\ \text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \text{sen}\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\ p + \text{sen}\ q = 2\ \text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) - \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\ p - \text{sen}\ q = 2\ \text{sen}\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2},$$

Estas fórmulas se obtienen, llamando:

$$(\alpha + \beta) = p \quad y \quad (\alpha - \beta) = q$$

es decir:

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \quad e \quad \beta = \frac{p-q}{2}$$

y sumando o restando las fórmulas obtenidas en el punto anterior. En definitiva, las fórmulas se pueden escribir como:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos x \cdot \cos y$$
$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = -2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos y$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos y$$

<u>Otras identidades</u>:

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} (\alpha/2) \cos (\alpha/2); \qquad \cos \alpha = \cos^2 (\alpha/2) - \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = [2 \operatorname{tg} (\alpha/2)] / [1 - \operatorname{tg}^2 (\alpha/2)]; \qquad \operatorname{ctg} \alpha = [\operatorname{ctg}^2 (\alpha/2) - 1] / [2 \operatorname{ctg} (\alpha/2)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}}{2}; \qquad \cos \alpha = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}{2}$$
$$\operatorname{sen} (\alpha/2) = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{2}; \qquad \cos (\alpha/2) = \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{2};$$

o bien:

$$2 \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha; \qquad 2 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2) = 1 - \cos \alpha$$
$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha; \qquad 2 \cos^2 (\alpha/2) = 1 + \cos \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1 - \cos 2\alpha} \;/\; \sqrt{1 + \cos 2\alpha}; \qquad \operatorname{tg} (\alpha/2) = \sqrt{1 - \cos \alpha} \;/\; \sqrt{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha \pm \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 \pm \operatorname{sen} 2\alpha}$$

El signo de las raíces está determinado por el cuadrante en que se encuentra el ángulo.

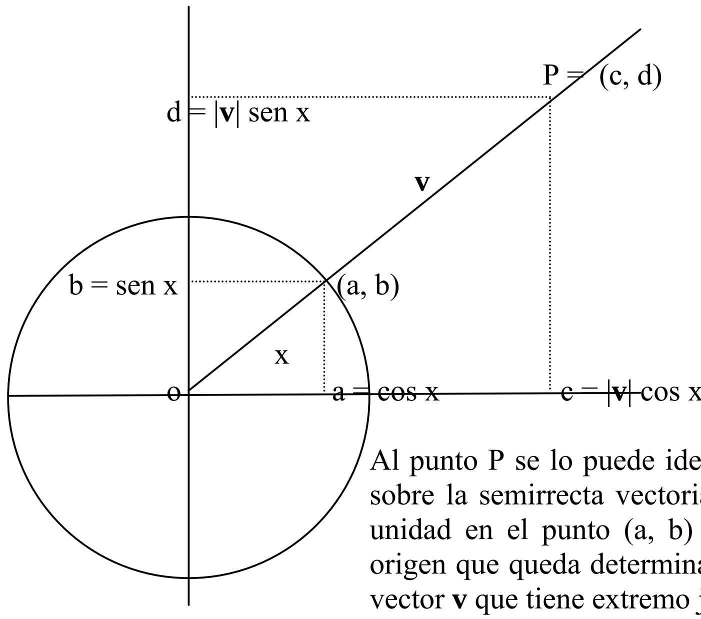
$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} n\alpha = n \operatorname{sen} \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{sen}^3\alpha \cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} \operatorname{sen}^5\alpha \cos^{n-5}\alpha - \ldots.$$
$$\cos n\alpha = \cos^{n} \alpha - \binom{n}{2} \operatorname{sen}^2\alpha \cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} \operatorname{sen}^4\alpha \cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

3.13. Razones trigonométricas y vectores

En el círculo unidad U de la figura, tomamos un punto sobre el círculo:

(a, b) = (cos x, sen x) y consideremos un punto P, sobre la misma semirrecta vectorial que pasa por el punto (a, b), de coordenadas (c, d).



Al punto P se lo puede identificar como el punto sobre la semirrecta vectorial que corta al círculo unidad en el punto (a, b) y a una distancia del origen que queda determinada por la longitud del vector **v** que tiene extremo justamente en P.

En consecuencia, si multiplicamos el punto (a, b) por la longitud del vector v, obtenemos el punto

$$P = |\mathbf{v}|\,(a, b) = |\mathbf{v}|\,(\cos x; \operatorname{sen} x) =$$
$$= (c, d) = (|\mathbf{v}| \cos x; |\mathbf{v}| \operatorname{sen} x).$$

Ahora, en la misma figura podemos observar que el origen o, el punto P y el punto c sobre el eje de abscisas, son los vértices de un triángulo rectángulo, que tiene por *<u>hipotenusa</u>* al módulo del vector **v**; por *<u>cateto adyacente</u>*, al número c = ||**v**||cos x y por *<u>cateto opuesto</u>*, a d = ||**v**|| sen x. Entonces podemos escribir:

de c = ||**v**|| cos x se tiene, $\cos x = \dfrac{c}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a x}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

de d = ||**v**|| sen x se obtiene, $\operatorname{sen} x = \dfrac{d}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a x}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$

Sabemos que: $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a x}}{\text{longitud del cateto adyacente a x}}$;

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a x}}{\text{longitud del cateto opuesto a x}};$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a x}}:$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a x}}$$

3.14. Ley de los senos y ley de los cosenos

El siguiente teorema es particularmente útil en la resolución de triángulos oblícuos.

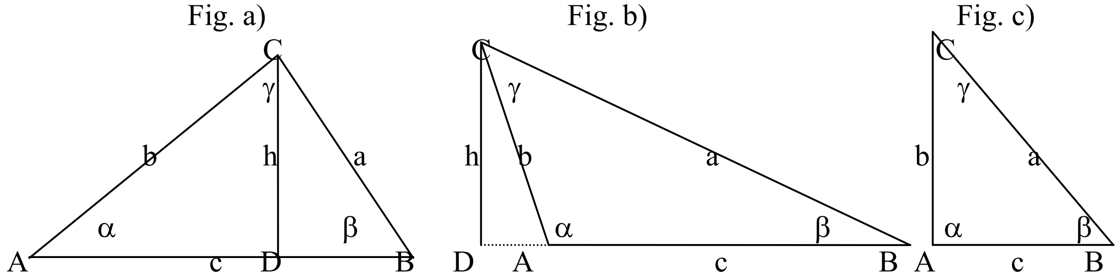
3.14.1. Teorema: Ley de los senos

Sean α , β y γ *los ángulos de un triángulo y* a, b y c *los lados opuestos respectivamente. Entonces:*

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma},$$

Primero demostremos que $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$. Dado cualquier triángulo ABC, existen tres posibilidades, como se indican en la Figura. Trazamos un segmento lineal desde C perpendicular a su lado opuesto. En la Figura a) este segmento toca al AB del triángulo en D. En la Figura b) toca a la extensión de AB en D y en la Figura c) se tiene que h = CD.

Fig. a) Fig. b) Fig. c)



en la Fig. a) tenemos que: sen $\alpha = \frac{h}{b}$, sen $\beta = \frac{h}{a}$; por lo que: h = b sen α = a sen β, por lo tanto:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}.$$

En la Fig. b), sen $(\pi - \alpha) = \frac{h}{b}$ = sen α; sen $\beta = \frac{h}{a}$; por lo que: b sen α = a sen β, es decir

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

En la Fig. c), $\frac{h}{b}$ = 1 = sen 90º = sen α o también h = b sen α; por otro lado se tiene que h = a sen β, es decir: b sen α = a sen β, de donde se vuelve a verificar la igualdad:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}.$$

En forma similar, construyendo un segmento lineal desde B y perpendicular al lado opuesto, se puede demostrar que:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma},$$

Por transitividad, se obtiene la ley de los senos.

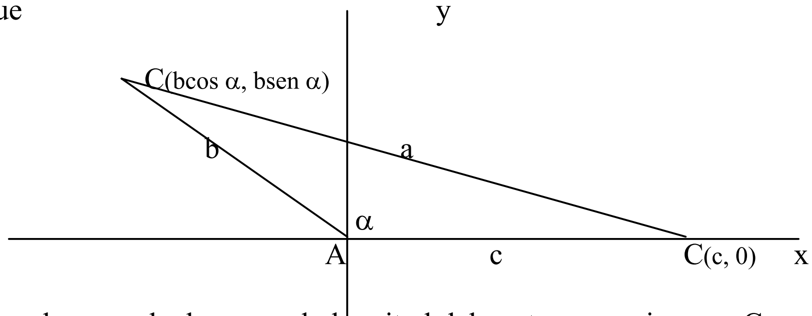
3.14.2. Teorema: Ley de los cosenos

El teorema de Pitágoras que se aplica a triángulos rectángulos, puede generalizarse para triángulos que no sean necesariamente triángulos rectángulos. Esta generalización se denomina Ley de los cosenos, y una forma de mostrar la misma es la siguiente:

Sean α , β y γ *los ángulos de un triángulo y* a, b y c *los lados opuestos respectivamente. Entonces:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Colocamos el triángulo de manera que el vértice A del mismo coincida con el origen del sistema de referencia ortonormal, el vértice B sobre el eje de las "x", es decir el vector que va de A a B con la misma dirección del eje de las x, como se observa en la figura que sigue



El cateto a, lo podemos calcular como la longitud del vector con origen en C y extremo en B o también como la distancia desde C hasta B, es decir:

a = $\sqrt{(b\cos\alpha - c)^2 + (b sen\alpha - 0)^2}$ es decir: $a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\, sen\,\alpha)^2$; de donde:

$$a^2 = b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2 sen^2\alpha,$$

$$a^2 = b^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) - 2bc\cos\alpha + c^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

En forma similar, colocando el vértice B coincidiendo con el origen de coordenadas se puede demostrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 – 2ac \cos \beta.$$

Lo mismo se hace con C para obtener la fórmula: $c^2 = a^2 + b^2 – 2ab \cos \gamma$

3.15. Funciones sinusoidales

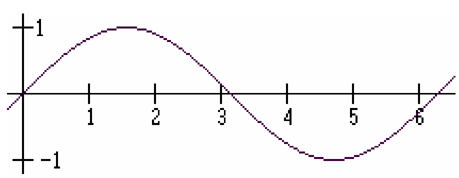
Nos interesa caracterizar los gráficos de las funciones trigonométricas más generales, en particular los que resulten de las funciones seno y coseno.

La regla de correspondencia para estas funciones cuya gráfica nos interesa caracterizar viene dada por: $f(x) = a\cdot sen(bx + c)$ o también por $g(x) = a\cdot cos(bx + c)$; con a, b y c números reales, con a y b distintos de cero.

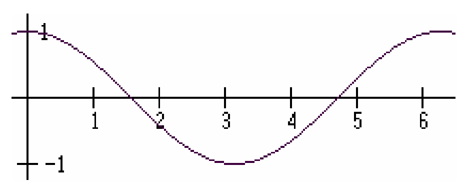
Para ello recordemos que el seno es una función periódica de período 2π, al igual que la función coseno, que el conjunto imagen es el intervalo $[-1, 1]$, para ambas funciones, es decir que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{y que} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad (1)$$

la función seno con ceros en: $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$; y la función coseno con cero en: $x = \pi/2$ y $x = 3/2\ \pi$; y que sus gráficas respectivas para un período son:



y = sen x



y = cos x

Ahora, fijaremos nuestra atención sobre la gráfica del seno y el efecto que tienen sobre las mismas los números a, b y c, en primer lugar tratar de responder la pregunta: ¿qué efecto sobre la gráfica del seno, tendremos al multiplicar por un número $a > 0$?

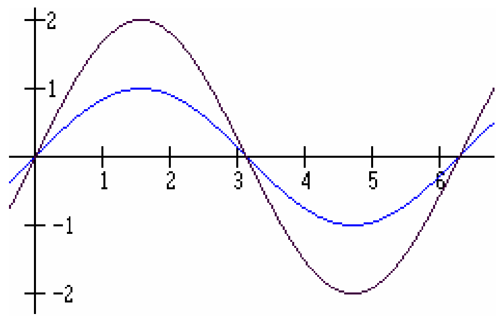
3.15.1. Gráfica de $y = a\cdot sen\ x$, $(a > 0)$.

Es evidente que si consideramos la función $y = a\cdot sen\ x$, con $a> 0$, cambiará el conjunto imagen de la función. De acuerdo a la desigualdad dada en (1) se tiene que:

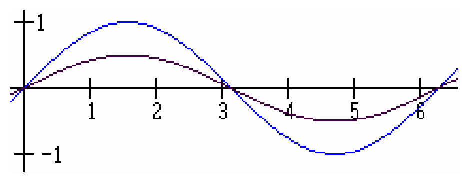
$-a \leq a \cdot \operatorname{sen} x \leq a$, el conjunto imagen será entonces $[-a, a]$.

En cambio el período permanece inalterable, $p = 2\pi$, al igual que los ceros de la función.
Para ilustrar esta situación consideremos los siguientes ejemplos:

1º Ejemplo: $y = 2 \operatorname{sen} x$



2º Ejemplo: $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$



Como se aprecia, el número a (amplitud) nos indica la longitud del conjunto imagen (ambos gráficos, comparadas con la función dada por $y = \operatorname{sen} x$).

Comparemos ahora la función dada por $y = \operatorname{sen} x$ y la dada por $y = \operatorname{sen} bx$.

3.15.2. Gráfica de $y = \operatorname{sen} bx$, ($a = 1$ y $c = 0$).

Al multiplicar la variable independiente por un número fijo b, cambiarán de lugar los ceros de la función, y por consiguiente el período. Observemos que:

El primer cero se obtiene cuando $bx = 0$, o sea en $x = 0$.

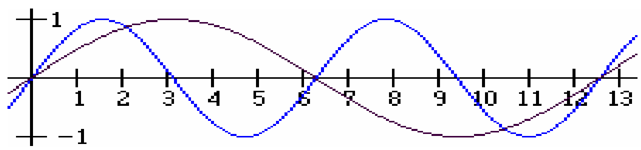
El segundo cero se obtiene cuando $bx = \pi$, o sea en $x = \frac{\pi}{b}$, y

El tercer cero cuando $bx = 2\pi$, es decir en $x = \frac{2\pi}{b}$.

El período de la función cambiará de $p = 2\pi$ a $p = \dfrac{2\pi}{b}$.

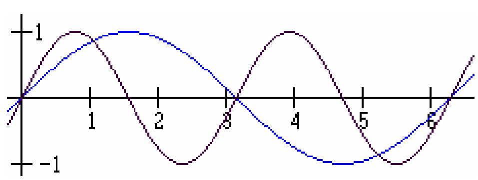
Para ilustrar este caso consideremos dos gráficas una con $0 < b < 1$ y otra con $b > 1$, cada una de ellas comparadas con la función dada por $y = \text{sen } x$.

3º Ejemplo: $y = \text{sen } \frac{1}{2} x$



Se debe observar para la función dada por $y = \text{sen } \frac{1}{2} x$, que el período es $p = 4\pi$, y que sus tres ceros están en: $x = 0$; $x = 2\pi$ y $x = 4\pi$.

4º Ejemplo: $y = \text{sen } 2x$.



En cambio ahora, el período de la función dada por $y = \text{sen } 2x$ es $p = \pi$, y los ceros para este período están en: $x = 0$; $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

Las gráficas que hemos considerado hasta ahora, todas ellas están dibujadas para el número $c = 0$. Debemos observar que en todas el primer cero se encuentra siempre en $x = 0$. ¿Qué pasa si el número c es distinto de cero? O sea, las funciones del tipo $y = \text{sen}(x + c)$ con $c \neq 0$.

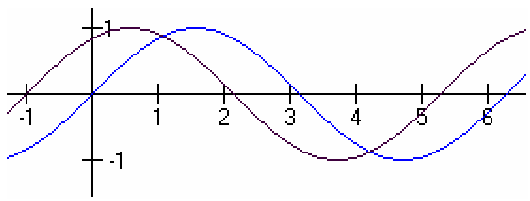
3.15.3. Gráfica de $y = \text{sen}(x+c)$, ($a = 1$, $b = 1$ y $c \neq 0$).

Repasando lo anterior (para la función seno), dijimos que el primer cero lo determinábamos para argumento igual a cero, es decir los ceros para la función y = sen (x + c) serán:

Primer cero:	$x + c = 0$, es decir en:	$x = - c$;
Segundo cero:	$x + c = \pi$, o sea en:	$x = \pi - c$;
Tercer cero:	$x + c = 2\pi$, o también:	$x = 2\pi - c$.

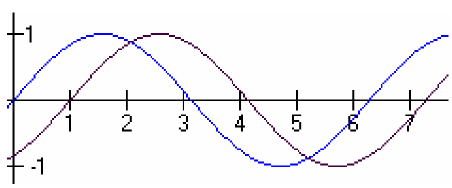
Por consiguiente la gráfica de la función dada por y = en (x + c) aparecerá desplazada respecto de la de y = sen x, como se puede observar en los ejemplos que siguen:

5º Ejemplo: y = sen (x + 1)



El período no cambia (b = 1), si cambian de lugar los ceros, observe que el primer cero para un período, lo podemos tomar como x = -1.

6º Ejemplo: y = sen (x – 1).

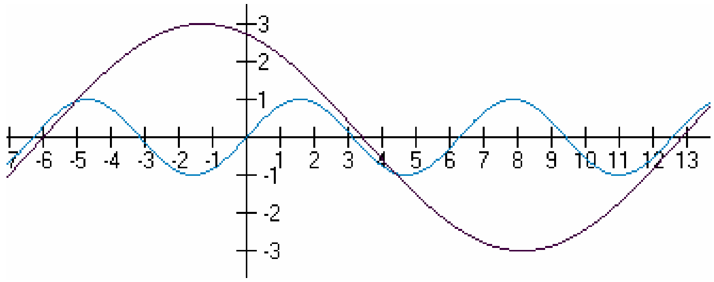


En este caso ubicamos al primer cero en x = 1.

Por último, dibujemos algunas gráficas que tengan a los números a, b y c simultáneamente distintos de cero.

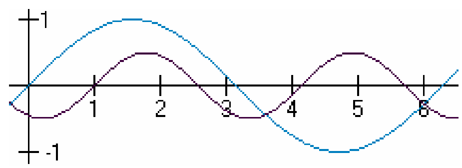
3.15.4. Gráfica de $y = a \cdot \text{sen}(bx + c)$. $(a \neq 0;\ b \neq 0 \text{ y } c \neq 0)$.

7º Ejemplo: y = 3 sen(1/3 x + 2)



Para esta función el primer cero se puede obtener en 1/3 x + 2, o sea en x = - 6, y el período será $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}$, es decir p = 6 π. Además tiene amplitud a = 3.

8º Ejemplo: y = ½ sen(2x – 2).



El período es p = π; y el primer cero lo encontramos en x = 1.

En resumen, *para dibujar la gráfica de una función sinusoidal*, se deberá:

1º. Calcular el período como: $p = \frac{2\pi}{b}$

2º. Identificar la amplitud: el número a.

3º. Calcular los tres ceros para un período, recordando que el primer cero inicia el período, el tercero lo termina y el segundo está justo en el medio de los ceros extremos.

4º. También se debe observar que el valor máximo y el mínimo se alcanzan siempre en el centro de los intervalos que tienen como extremos a dos ceros consecutivos.

3.16. Amplitud, período, fase

Uno de los conceptos trigonométricos más importantes es el de curva sinusoidal. Se presenta en partes de Astronomía, matemáticas y todas las ciencias que incluyen a las ciencias sociales. Como ya dijimos, es simplemente la gráfica de y = a·sen (bx + c), siendo a, b, c constantes positivas.

Sabemos que el período es $p = \dfrac{2\pi}{b}$, y a recibe el nombre de amplitud, ahora bien, la frecuencia de una oscilación es el número de períodos que hay en un intervalo de unidad de tiempo, normalmente un segundo. La frecuencia de mide en períodos por segundos, o, en lenguaje más corriente en ciclos por segundo. O sea, un ciclo es lo mismo que un período. La unidad empleada en radiodifusión es el kilociclo (mil ciclos) por segundo. Estos son los números que marca el dial de un aparato de radio. La corriente eléctrica normal de las casas es de “50 ciclos” o de “60 ciclos”, lo que significa una frecuencia de 50 ciclos/seg. o de 60 ciclos/seg.

Si una oscilación tiene un período de p seg., su frecuencia es de: $\omega = \dfrac{1}{p}$ ciclos/seg.

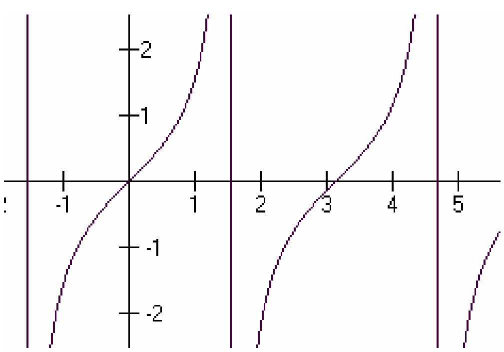
Por ejemplo, la frecuencia de y = a·senBx es $\omega = b/2\pi$, y la de $y = a \cdot \mathrm{sen}(2\pi\omega t)$ es ω ciclos/seg. El período de ondas de radio se expresa, en términos de la distancia recorrida por la onda en p segundos. Esta distancia se llama longitud de onda λ. Como la velocidad de una onda de radio es $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg, la longitud de onda correspondiente a un período de p segundos será $3p \cdot 10^{10}$cm. De manera que;

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\omega}\ \text{cm}$$

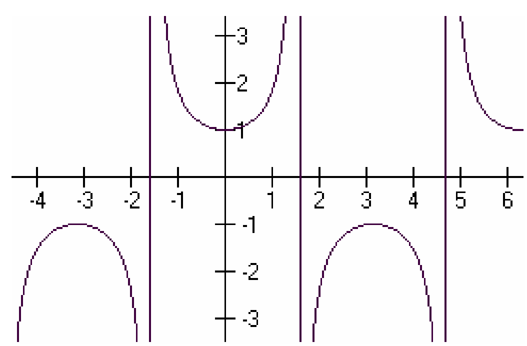
Con esta fórmula se pueden convertir frecuencias en longitudes de onda y viceversa.

Como se sabe, las ondas de radio transmiten los sonidos de las voces, de los instrumentos musicales, etc. Para más sencillez, consideremos un tono musical puro. Estos tonos musicales puros se representan por una curva sinusoidal, en la que la amplitud corresponde a la altura del sonido y la frecuencia ω al tono.

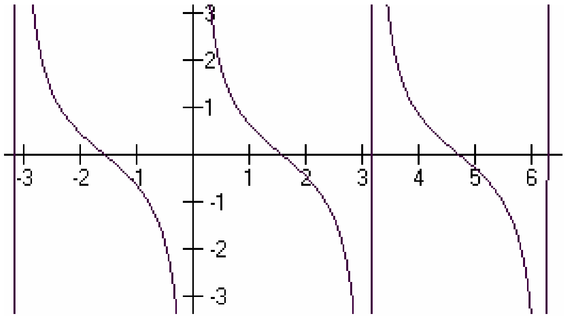
Recordatorio: gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.



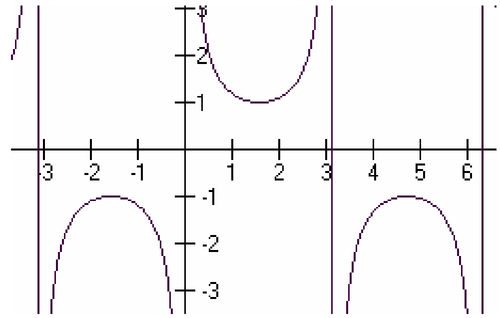
y = tan x



y = sec x



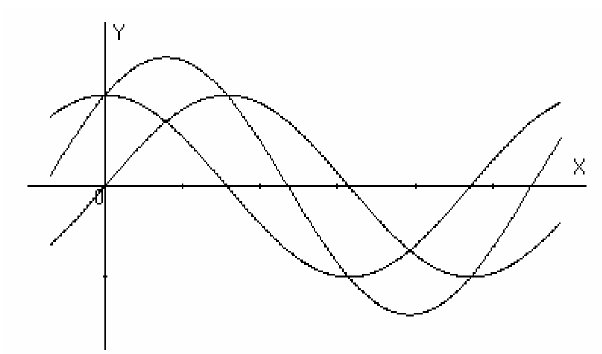
y = cotan x



y = cosec x

Muchas veces necesitamos conocer las gráficas de sumas de funciones trigonométricas, para dibujarlas solamente tenemos que seguir las reglas del álgebra de funciones.

Por ejemplo: y = sen x + cos x



3.17. Funciónes trigonométricas y sus inversas

3.17.1. Variación de las funciones trigonométricas

Las funciones, de **R** en **R**, $x \to \text{sen } x$ y , $x \to \cos x$ son periódicas, de período 2π. La primera es una función impar, porque sen(-x) = sen x, y la segunda es par dado que cos(-x) = cos x.

La función, $x \to \tan x$, es periódica, de período π, e impar.

La función, $x \to \text{cotan } x$, es periódica, de período π, e impar.

Además sabemos que se cumplen las siguientes propiedades:

1) $x \to \text{sen } x$ es *estrictamente creciente* en $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$;

$x \to \cos x$ es *estrictamente decreciente* en $[0, \pi]$;

x $\to$ tan x es *estrictamente creciente* en $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$;

x $\to$ cotan x es *estrictamente decreciente* en [0, π].

Las demostraciones de estas propiedades se pueden consultar en la bibliografía o en gabinete.

3.17.2. Funciones inversas

1) A esta altura del estudio, el alumno debe saber que la restricción de la aplicación x $\to$ sen x al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ sobre el [-1, +1], es inyectiva y sobreyectiva, por consiguiente *biyectiva*.

A la función inversa se le denomina ***arco seno***, y se escribe y = Arc sen x, es decir: x $\to$ y = Arc sen x. Por definición de inversa, se tiene:

$$\text{Arc sen: } [-1,+1] \to \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \to y = \text{Arc sen } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{sen } y$$

Esta función es *estrictamente creciente sobre* [-1, +1].

2) Por otra parte la función x $\to$ cos x es biyectiva si está restringida a: [0, π] sobre [-1, +1], y su función inversa se llama ***arco coseno***, y a la imagen de x se la denota: y = Arc cos x, se tendrá por definición de inversa que:

$$\text{Arc cos: } [-1,+1] \to [0,\pi]$$
$$x \to y = \text{Arc cos } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$$

La función arc cos es *estrictamente decreciente en* [-1, +1].

3) La función x $\to$ tan x es biyectiva de $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ sobre **R**. Su recíproca recibe el nombre de ***arco tangente***, y la imagen de x se escribe: y = Arc tan x. Por definición será:

$$\text{Arc tan: } \mathbf{R} \to \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \to y = \text{Arc tan } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y$$

La función x $\to$ Arc tan x es *estrictamente creciente sobre* **R**.

4) La función $x \to \cot x$ aplica biyectivamente $[0, \pi]$ sobre $\mathbf{R}$.

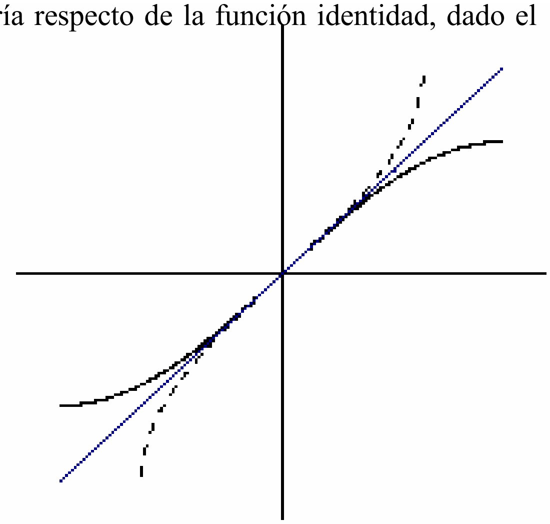
La aplicación inversa se denomina ***arco cotangente***, y se denota a la imagen de x por: $y = \text{Arc cotan } x$.

Es decir:

$$\begin{array}{lll} \text{Arc cotan: } \mathbf{R} & \to & [0, \pi] \\ \qquad\qquad x & \to & y = \text{Arc cotan } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotan } y \end{array}$$

En la figura que sigue se han dibujado los grafos de las funciones seno y la de arco sen, se observa en la gráfica la simetría respecto de la función identidad, dado el caracter de ser una la inversa de la otra.

En línea punteada se ha dibujado la gráfica de la aplicación biyectiva arco seno de $[-1, 1]$ sobre $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. En línea continua la función biyectiva seno, lo mismo que la línea recta que es la gráfica de la función identidad.



3.18. Función Exponencial

Definición

La función exponencial es una aplicación de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}_+^*$, *biyectiva, y continua* en todo su dominio y tiene por regla de correspondencia $\text{Exp}_a(x) = a^x$, que se lee: Exponencial de base "a", y con "a" un número real mayor que cero y distinto de 1. Es decir:

$$\text{Exp}_a\text{: } \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^* \;;$$

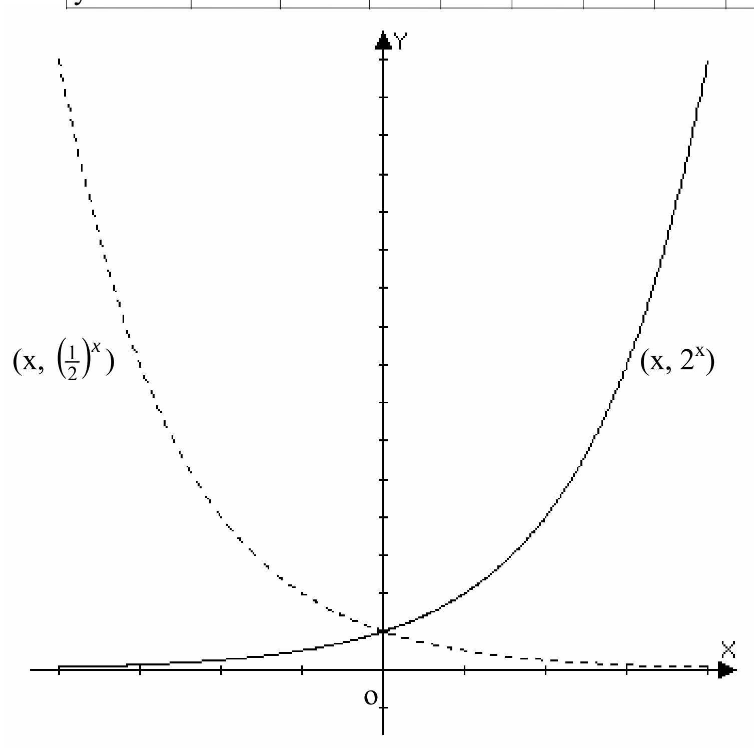
$$x \to y = a^x = \text{Exp}_a(x)\,,\ a > 0 \ \text{ y } \ a \neq 1,$$

Si la base "a" es un número mayor que 1 , la función exponencial es *creciente;* Si "a" es mayor que cero y menor que 1, la función es *decreciente*.

Ejemplo:

Consideremos la función exponencial de base a = 2, es decir $y = 2^x$, y hagamos la siguiente tabla:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	1/16	1/8	¼	½	1	2	4	8	16



Vamos a considerar ahora el siguiente problema: ¿Es el 20% + 20% = 40 % ?...

Un biólogo estudiando el crecimiento de un potrillo inicia sus observaciones cuando este pesa 50 kg. Al mes el peso se incrementa en un 20%; esto significa que alcanza un peso de ... kg. En el segundo mes se incrementa otro 20%, el peso será entonces de ... kg. ¿Es el 20% + 20% = 40% ?

Tomemos el caso de crecimiento planteado en el ejercicio anterior y tratemos de generalizarlo.

Llamemos p_0 al peso inicial, p_1 y p_2 a los pesos al cabo del primero y segundo mes. Lo planteado en dicho problema será pues:

$$p_1 = p_0 + \frac{20}{100} p_0 = p_0\left(1 + \frac{20}{100}\right)$$

$$p_2 = p_1 + \frac{20}{100} p_1 = p_1\left(1 + \frac{20}{100}\right) = p_0\left(1 + \frac{20}{100}\right)^2$$

y si se sigue el proceso de la misma manera, para los sucesivos meses será:

$$p_3 = p_0\left(1+\frac{20}{100}\right)^3$$

$$p_4 = p_0\left(1+\frac{20}{100}\right)^4$$

y para el enésimo mes: $p_n = p_0\,(1+ 20/100)^n$; y si llamamos a la constante $1 + 20/100$; "a": quedará:

$$p = p_0\, a^n$$

Observación:

Por supuesto que la afirmación de que el peso del animal, aumenta un 20 % cada mes puede ser una afirmación razonable para los primeros meses, pero se transforma en ridícula para períodos mayores, (haga el cálculo para 2 o 3 años).

Las funciones exponenciales aparecen mucho en el estudio de numerosos procesos de crecimiento o decrecimiento, como también en muchas leyes de física.

En biología frecuentemente se debe estudiar el comportamiento de una "población" en función de su edad. Como "población" consideraremos un conjunto genérico de entidades individuales, por ejemplo las células de un cultivo, las bacterias que se multiplican en un tubo de ensayo, las moléculas de una sustancia dispersa en un organismo o, finalmente, una población verdadera (las ballenas de nuestros mares o la población humana).

Para describir el comportamiento de los individuos de una población a lo largo del tiempo, bajo ciertas condiciones normalmente controladas, es necesario utilizar las *funciones exponenciales.*

Si, por ejemplo, un bacteriólogo mide a intervalos regulares de tiempo el número de microbios por cm^3 de un caldo de cultivo, encontrará que este número aumenta cada vez en un factor constante

Sea n_0 el número de bacterias por cm^3 en el instante t_0 y sea $n_1 = an_0$ su número en el instante $t_1 = T$; en $t_2 = 2T$ habrá $n_2 = an_1 = a^2n_0$ bacterias, en $t_3 = 3T$ el número de bacterias será $n_3 = an_2 = a^3n_0$, y así sucesivamente.

Generalizando, en el instante $t_i = iT$ (i = número entero) estarán presentes $n_i = a^in_0$ bacterias.

<u>Ejercicios:</u>

Represente en un sistema de ejes cartesianos, las siguientes funciones.

a) $y = 0{,}5^x$ b) $y = 1^x$ c) $y = 3^x$ d) $y = (1/3)^x$

Según la observación de los gráficos responda:

1) Los valores de las funciones exponenciales son:
   a) todos negativos,
   b) todos positivos,

2) las funciones exponenciales cortan al eje de las “x” en el punto (,);

3) las funciones exponenciales cortan al eje de las “y” en el punto (,);

4) si $a > 1$, la función exponencial es ¿creciente o decreciente?

5) si $a < 1$, la función exponencial es ¿creciente o decreciente?;

6) si $a = 1$ .....

Una población de 10000 bacterias en el instante inicial crece de acuerdo a una ley exponencial alcanzando el número 16500 al cabo de dos horas. Determinar: ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 4 horas, y después de 24 horas?

Si “a” indica la altura en cm y “p” el peso en kg., se sabe, de acuerdo a los trabajos de Du Bois, que la superficie del cuerpo humano, medida en cm^2 está dada aproximadamente por

$$S = 71{,}84\, p^{0{,}625}\, a^{0{,}725}$$

calcule su propia superficie corporal.

Propiedades:

a) $a^{x+y} = a^x a^y$; b) $(a^x)^y = a^{xy}$, c) $a^{-x} = 1/a^x$; d) $a^{x-y} = a^x/a^y$

<u>NOTA:</u>

Una función exponencial muy importante en matemática es la que por base al número irracional e, y en ese caso se denota: $y = e^x = \exp(x)$

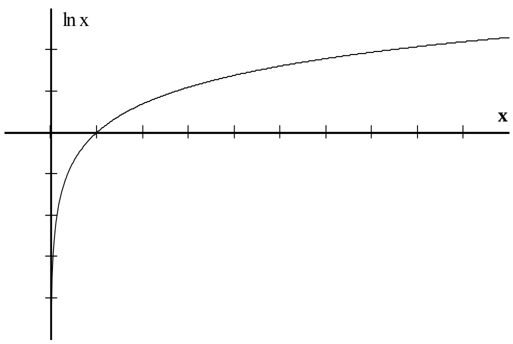
3.18. <u>La función logarítmica</u>

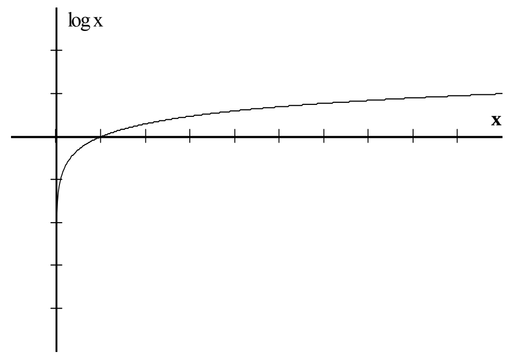
La función logaritmo de base a, (con a mayor que cero y distinto de uno) es una aplicación que tiene por dominio al conjunto de números reales estrictamente positivos y por codominio al conjunto de los números reales, es una función biyectiva, y tiene por función recíproca a la función exponencial de base a, se la denota:

$$\mathrm{Log}_a:\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$$
$$x \to y = \mathrm{Log}_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

Simplificando el problema tenemos una ecuación de la forma $y = a^x$ y queremos obtener el valor “x” para el cual sea cierta la igualdad, entonces usamos la función recíproca de la exponencial y despejamos $x = \mathrm{Log}_a y$.

Hay dos valores de "a" que son usados con frecuencia: 10 y el número irracional "e"; estos logaritmos se llaman ***decimal*** y ***natural*** o ***Neperiano*** respectivamente y se simbolizan: log x ; ln x.. Sus gráficas son:





Ejercicios:

Calcule el valor de x si:

$x = \text{Log}_2\ 16$; $x = \text{Log}_8\ 8$; $x = \text{Log}_2\ 1/16$; $\text{Log}_{81}\ 3 = x$; $\text{Log}_3\ x = -2$

En un mismo gráfico represente:

a) $y = \text{Log}_2\ x$ b) $y = \text{Log}_{1/2}\ x$; saque conclusiones.

c) $y = 10^x$ d) $y = \log x$; obtenga conclusiones.

Para resolver el ejercicio que sigue deberemos recordar las siguientes:

Propiedades: (válidas cualquiera sea la base a).

a) $\log x.y = \log x + \log y$; b) $\log x/y = \log x - \log y$; c) $\log x^y = y.\log x$

y la definición: $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$; $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Resolver, aplicando propiedades, las siguientes ecuaciones:

a) $\log (x + 1) – \log (x+2) = 0$; b) $\log(x+1) + \log (x+2) = \log (x^2+5)$

c) $\log (2x - 1) + \log x = \log (2x^2 - 3)$; d) $4 \log x/3 + 3 \log x/3 = 5 \log x - \log 27$

e) $5^x = 0{,}04$; f) $3^{x/2} = 27$

Más ejercicios de entrenamiento.

Nº1. Determine si el conjunto dado en cada caso es el grafo de una función real de variable real. En caso afirmativo, halle su dominio.

a) $\{(x, y) / y = \sqrt{x-4}\}$ b) $\{(x, y) / y = x + 1\}$ c) $\{(x, y) / x = 2\}$

d) $\{(x, y) / y = \sqrt{4-x^2}\}$ f) $\{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$ g) $\{(x, y) / y = x^2\}$

h) $\{(x, y) / x = \sqrt{y-4} + 2\}$ i) $\{(x, y) / y = 1/x\}$ j) $\{(x, y) / y = -2\}$

Nº2. Dada la función $f(x) = 3/x$, calcular: a) $f(1)$ b) $f(-3)$ c) $f(6)$ d) $f(1/3)$

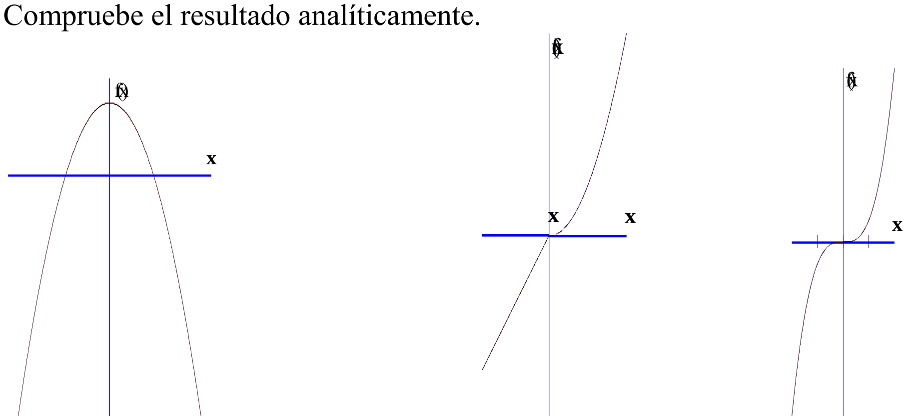
e) $f(3/a)$ f) $f(3/x)$ g) $f(f(3)/f(x))$ h) $f(x-3)$ i) $f(x) - f(3)$ j) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

Nº3. Graficar las siguientes funciones f: $\mathbf{A} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -|x|$ d) $f(x) = |x - 2|$ e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = \dfrac{k}{x}$ para distintos valores de $k \in \mathbf{R}$ g) $f(x) = k$; $k \in \mathbf{R}$ h) $f(x) = -(1/2)x - 2$

i) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ k) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Nº4. Observe las siguientes gráficas y diga si cada función es par, impar o ninguno de estos dos tipos. Compruebe el resultado analíticamente.



a) b) c)

a) $f(x) = -x^2 + 3$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ c) $f(x) = x^3$

Nº5. Defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta:

$$(f \circ g)_{(x)}\ ; \quad (g \circ f)_{(x)}\ ; \quad (f \circ f^{-1})\ ; \quad (g \circ g^{-1}) \quad \text{si:}$$

a) $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$ b) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = x^2 - 2$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;

$g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Nº6. Para las funciones f y g y el número c, obtenga $(f \circ g)_{(c)}$ mediante dos métodos: 1) Calcule g(c) y utilice este número para determinar f(g(c)) 2) Determine $(f \circ g)_{(x)}$ y emplee ese valor para calcular $(f \circ g)_{(c)}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$; $g(x) = 2x - 5$; $c = 4$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$; $g(x) = x^2 - 3x$; $c = 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$; $c = 1/2$

Nº7. h(x) se expresa como composición dos funciones f(x) y g(x). Identifique ambas funciones y el orden de la composición:

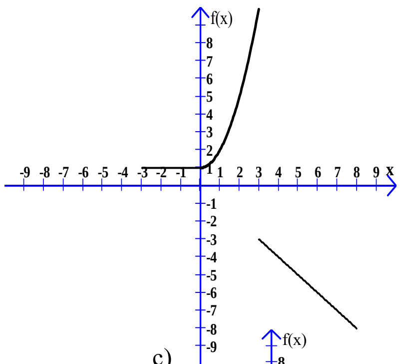
a) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ b) $h(x) = \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^3$ c) $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$ d) sen $(x - 5)$

e) $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ f) $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ g) $h(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ i) $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

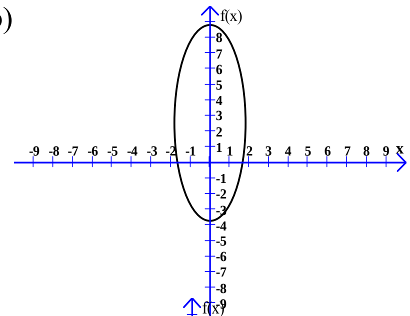
GUÍA Nº3: *Funciones reales de variable real.*

EJ. Nº1. Diga si las siguientes graficas, representan dibujos de grafos de funciones. En caso afirmativo, defina el dominio y conjunto imagen de la función.

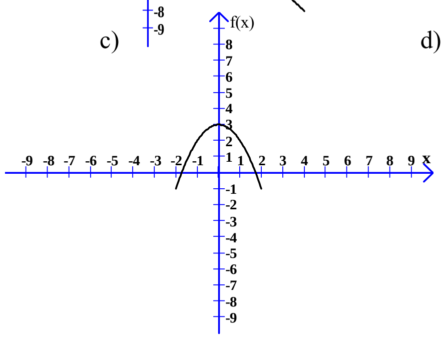
a)



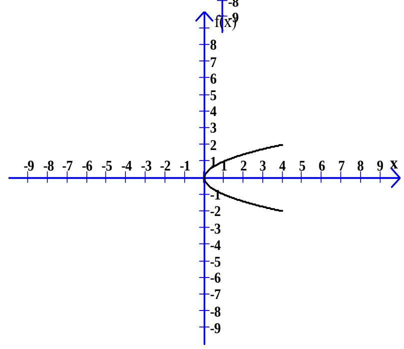
b)



c)



d)



EJ.Nº2. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

EJ.Nº3. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, determinar: $f(0)$; $f(\sqrt{2})$; $f(1+\sqrt{2})$; $f(-x)$; $f(x+1)$; $2f(x)$; $f(2x)$.

Ejercicio Nº4. 1) Sea $f(x) = x^2$; diga en cada caso si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Construya un gráfico.

a) Para f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ b) Para f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ (Recordar que: $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ y $\mathbf{R}^*_+ = \mathbf{R}_+ - \{0\}$)

c) Para f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$.

2) ¿ En qué caso del ítem 1) se puede determinar la inversa?. Obténgala y grafique.

Ejercicio Nº5. Determinar el dominio y el codominio de las siguientes reglas de correspondencias, para que las mismas representen a funciones biyectivas.

a) $f(x) = 2x + 1$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, f: $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ c) $f(x) = x^3$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+1}$; f: $A \to B$ e) $f(x) = \sqrt{3x-2}$; f: $C \to D$ f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$;

f: $E \to F$; con A, B, C, D, E y $F \subset \mathbf{R}$.

EJ.Nº6. Determinar f(2 +h), f(x + h) y $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $h \neq 0$, si:

a) $f(x) = x - x^2$ b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

EJ.Nº7. Determinar el dominio y conjunto imagen de la función.

a) $f(x) = 6 - 4x$, $-2 \leq x \leq 3$ b) $g(x) = \frac{2}{3x-5}$ c) $h(x) = \sqrt{2x-5}$

EJ.Nº8. Establecer el dominio de cada función.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ b) $\phi(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi - x}}$ c) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$ d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$ f) $g(x) = \sqrt{-x}$ g) $h(x) = \sqrt{4-x^2}$

EJ.Nº9. Dadas las siguientes funciones f: A→ B y g: C → D, con A, B, C y D ⊂ **R**, determinar f + g; f – g ; f · g; y f/g y definir sus respectivos dominios.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$; $g(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = \sqrt{1+x}$; $g(x) = \sqrt{1-x}$

EJ.Nº10. Graficar las siguientes funciones f: **A ⊂ R→R**

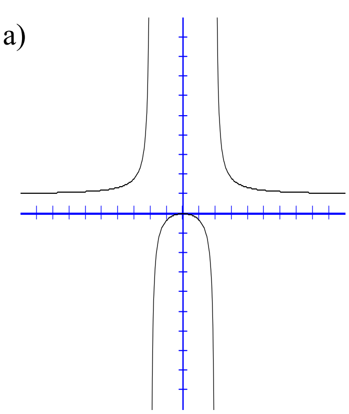
a) $f(x) = x$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -|x|$ d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{k}{x}$ para distintos valores de $k \in$ **R** g) $f(x) = k$; $k \in$ **R** h) $f(x) = -(1/2)\, x - 2$

i) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ k) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

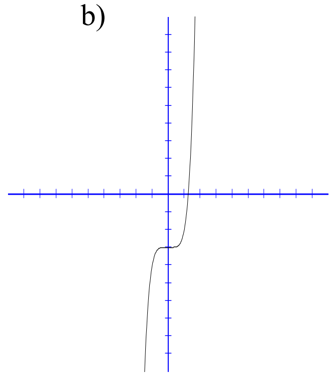
EJ.Nº11. A partir de la gráfica de f: A → B, con A, B ⊂ **R**, determinar las gráficas respectivas de: f(x) – 2; f(x) + 2; f(x – 2) ; –f(x) ; 2f(x) ; f(-x), si : a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = |x|$

EJ.Nº12. Diga si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de estos tipos:

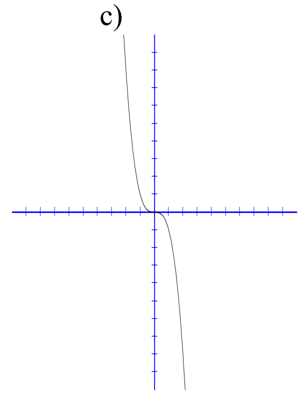
a)



b)



c)



EJ.Nº13. Diga si las siguientes funciones son pares, impares o de ninguno de estos tipos.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ d) $f(x) = x$

EJ.Nº14. Defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta: $(f \circ g)_{(x)}$; $(g \circ f)_{(x)}$; $(f \circ f^{-1})$; $(g \circ g^{-1})$; $(f \circ g)_{(1)}$; si:

a) $f(x) = 2x^2 - x$; $g(x) = 3x + 2$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $g(x) = x^2$

b) $f(x) = 1/x$; $g(x) = x^3 + 2x$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

EJ.Nº15. h(x) se expresa como composición de dos o más funciones. Identifique las funciones componentes y el orden de la composición:

a) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ b) $h(x) = \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^3$ c) $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$ d) $h(x) = \operatorname{sen}^2 (x - 5)$

e) $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ f) $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ g) $h(x) = \dfrac{1}{\cos x^2}$ i) $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

EJ.Nº16. Si $f(x) = 3x + 5$, y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, deduzca una función g, tal que $f \circ g = h$.

EJ.Nº17. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x$. ¿En qué difieren $f \circ f$ y la función g?

Anexo Guía 2:

a) Funciones polinómicas. Polinomio de segundo grado

1) Graficar: a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = -x^2 + 3$ c) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$
d) $f(x) = x^2 - 3x$ e) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ f) $f(x) = x^2 + 2$

2) Para las funciones del ítem 1): a) Dar dominio e imagen. b) Determinar los ceros de las funciones de segundo grado.

3) Si $f(x) = 2x^2 - 3$, restringir el dominio de la función de modo tal que pueda determinarse f^{-1} y hallar $f \circ f^{-1}$.

b) Funciones periódicas: funciones circulares

1) Construir sobre los mismos ejes y a la misma escala un período completo de las siguientes funciones: a) $y = \operatorname{sen}(x)$; $y = 2 \operatorname{sen} 2x$, $y = \operatorname{sen}(1/2)x$

b) $y = \cos x$; $y = \dfrac{1}{3}\cos x$; $y = \cos (1/3)x$ c) $y = \tan x$; $y = \operatorname{ctg}(x)$

2) Dada la función $f = y = \text{arc sen}\,(x^2 - 1)$, encontrar su inversa. Hallar la fórmula para $(f^{-1} \circ f)$.

3) Dados los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales, expresarlos en radianes: a) 360º b) 270º c) 180º d) 90º e) 26º 32’ 15’’.

4) Dados los siguientes ángulos, expresarlos en grados sexagesimales: a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $(3/2)\,\pi$ d) π e) 1.5 rad f) $(5/2)\,\pi$ g) $2\,\pi$

5) Demuestre que : a) $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\,\cos x$
b) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

6) Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$ b) $\text{sen}\,x \cdot \text{ctg}\,x \cdot \sec x = 1$

c) $\text{tg}\,x \cdot \text{sen}\,x + \cos x = \sec x$ d) $\dfrac{1}{\text{tg}\,x + \text{c tg}\,x} = \text{sen}\,x \cdot \cos x$

c) Funciones exponencial y logarítmica

1) Representar en forma gráfica las funciones:

a) $y = 2^x$ b) $f(x) = e^x$ c) $\text{Exp}_3\,(x) = 3^{-x}$ d) $y = \log_{10}(x)$

e) $y = \log_e(x) = \ln(x)$ f) $f(x) = \log_{(1/2)}(x)$ g) $y = \log_{(2)}(x)$

2) Expresar cada relación en términos de $\log_a$, si:

a) $2^3 = 8$ b) $10^{-1} = 0.1$ c) $3^{-3} = 1/27$ d) $6^0 = 1$ e) $\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{-1/2} = \dfrac{1}{3}$ f) $27^{-1/3} = \dfrac{1}{3}$

3) Expresar cada relación en términos de Exp_a, si:

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_{10} 100 = 2$ c) $\log_{1/3} 9 = -2$ d) $\log_3 9 = 2$ e) $\ln 1 = 0$

4) Combinar las siguientes expresiones en un solo término:

a) $\ln 27 - \ln 9 + \ln (3)^{-4}$ b) $1/3 \ln (1/27) - \ln 16 + \ln 1$ c) $1/2 \ln x^2 - \ln y^{-2}$

5) Transformar la expresión del primer miembro en la del segundo miembro en la siguiente ecuación: $\ln \dfrac{x^2 + 2}{\sqrt[5]{x^2}} - \ln \left|x^{1/3}\right| = \ln (x^2 + 2) - \ln |x|^{11/15}$

6) Dadas las siguientes funciones reales de variable real, efectuar la operación indicada:
f o g; g o f, si:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = \ln x$ b) $f(x) = e^{x+3}$; $g(x) = \cos x$ c) $f(x) = \tan(x - a)$; $g(x) = \frac{1}{2}\ln x$ d) $f(x) = e^x$; $g(x) = \ln x$ e) $f(x) = 3^x$; $g(x) = \sqrt{x}$

7) Identifique las funciones componentes si:

a) $F(x) = \operatorname{sen}(\ln^2 x)$ b) $F(x) = e^{x^2+2}$ c) $F(x) = -\dfrac{1}{\ln^2 x}$ d) $F(x) = \ln(x^3 - 2)$

8) Encontrar $f \circ f^{-1}$ para las siguientes funciones:
a) $f(x) = e^{x+1}$ b) $f(x) = \ln(x + 1)$. Determinar además, en cada caso, el dominio de la función.

9) Resolver:

a) $\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = 1$ b) $e^{\ln(5x+3)} = 2$ c) $\log_x 2 = \dfrac{1}{4}$ d) $\log_3 \dfrac{2x+1}{4} = 0$
e) $2 \ln x = \ln 3 + \ln(2x - 3)$ f) $2^x\, 3^x - 1 = (1/5)^{-1}$ g) $x = 1/3 \ln 27 - 1/2 \ln 9$

Bibliografía:

Ayres, F.Jr. Álgebra Moderna. Libros McGraw-Hill.
Leithold, L. Matemáticas Previas al Cálculo. Harla.
Lentin, A.; Rivaud, J. Álgebra Moderna. Aguilar.
Pécastaings, F. Chemins vers l'Algèbre. Vuibert.
Queysanne, M. Álgebra Básica-Editorial Vicens-Vives.
Ramis, E.; Deschamps, C.; Odoux, J. Cours de Mathématiques epéciales. Masson.

Unidad 4: **ENUMERAMIENTOS**

.

4.1. Conjuntos inductivos

4.1.1. Definición

Un conjunto K de R es **inductivo** si verifica las siguientes propiedades:

1) $0 \in K$
2) $\forall r, \quad r \in K, \Rightarrow r^{\varphi} \in K$

r^{φ} es el "siguiente de r", al siguiente de 0 le llamamos 1, es decir $0^{\varphi} = 1 = 0 + 1$, entonces

$$r^{\varphi} = r + 1.$$

Ejemplos.

1) R (el conjunto de los números reales es inductivo)

2) $R^{+} = \{ x / x \in R \text{ y } x \geq 0\}$ es un conjunto inductivo

3) $K = \varnothing$ no es inductivo, no satisface la condición 1).

4) $K = \{x / x = 0\}$ no es inductivo, no satisface 2).

5) $K = \{x / x = 0 \text{ o } x \geq 1\}$ es un conjunto inductivo

6) $K = \{x / 0 < x \leq 1\}$ no es inductivo, no satisface 1) ni 2).

Nótese que si K es un conjunto inductivo, entonces:

$$0 \in K$$
$$1 = 0 + 1 \in K$$
$$2 = 1 + 1 \in K$$
$$3 = 2 + 1 \in K$$
$$4 = 3 + 1 \in K \ldots$$

4.2. El conjunto de los números naturales

4.2.1. Definición

Se llama conjunto de ***números naturales*** al subconjunto, denotado por **N**, caracterizado por las propiedades

1) **N** es inductivo
2) Si H $\subset$ **R** es un conjunto inductivo entonces **N** $\subset$ H

En otros términos, si a $\in$ **R**, a $\in$ **N** sí y sólo sí para todo subconjunto inductivo H de **R**, a $\in$ H.

Ejemplos:

a) Por la definición de conjunto inductivo queda claro que 0 $\in$ **N.**
b) 1 = 0 + 1 $\in$ **N**. Si 1 $\in$ **N** y siendo **N** inductivo, se sigue que:

   2 = 1 + 1 $\in$ **N**.
c) $\frac{1}{2} \notin$ **N**. Para probar esta afirmación es suficiente exhibir un conjunto inductivo H tal que $\frac{1}{2} \notin$ H. Sea K = {x / 0 ≤ x }; K es inductivo y $\frac{1}{2} \notin$ K, pues 0 < 1 < 2 implica $0 < \frac{1}{2} < 1$. Se deja como ejercicio para el alumno, probar que 3/2, 5/3 no son números naturales.

NOTAS:

I) ***N*** *es el menor (en el sentido de la inclusión) subconjunto de* ***R*** *que es inductivo.*

II) *La existencia de un subconjunto de los números reales que cumple las condiciones 1) y 2) del ítem 2.1, es el resultado de considerar la familia F de todos los subconjuntos inductivos de* ***R*** *(que no es vacía pues* ***R*** $\in$ ***F****) y de tomar la intersección*

$$\bigcap_{H \in F} H = N .$$

III) *Al conjunto de los números naturales con excepción del 0 (cero) se lo denota:* ***N**** *=* ***N*** *– { 0 }.*

4.3. Inducción matemática

4.3.1. Introducción

La **inducción o recurrencia matemática** es uno de los métodos de demostración más frecuentes en algunos campos de la matemática. La idea se entiende con facilidad. Se toma el siguiente ejemplo: se supone que se tienen las 28 fichas de dominó. Se está seguro de que están colocadas de pie, en fila india, de forma que si cae una, cae seguro la siguiente. Si un gracioso tira la primera hacia la segunda, ¿qué pasará? ¡Se caerán todas! Esto viene a ser la inducción.

Se pueden considerar los números 1, 2, 3, 4,... como fichas de dominó. Se supone estar seguro en demostrar, que si uno cualquiera de estos números tiene cierta propiedad p, entonces también el siguiente la tiene. A continuación uno se debe asegurar que el primero, el 1, tiene la propiedad p. ¿Conclusión? Claramente *todos* los números naturales tienen la propiedad p. A veces se puede probar que el número 25 tiene la propiedad p, pero no el 1. Entonces, claro está, se puede concluir que todos, a partir del 25, tienen la propiedad.

Como se ve, hay dos cosas importantes de las que uno se tiene que cerciorar:

(1) *Si h tiene la propiedad p, entonces también h + 1 tiene la propiedad p.*
(2) *El número 1 (o tal vez el 25), tiene la propiedad p.*

La conclusión, es decir que todas las fichas han caído, se expresa: "la proposición P(n) es verdadera para todo n".

La posibilidad de obtener tal conclusión a partir de (1) y (2) es una propiedad intrínseca de los números naturales que puede aplicarse a toda situación similar dada. El número de fichas de dominó que fue dado al principio, no desempeña ningún papel en este razonamiento; puede aumentarse tanto como se quiera. Con este ejemplo pretende darse una idea intuitiva del "principio de inducción o recurrencia", que se da a continuación.

4.3.2. Principio de Inducción o Recurrencia

Sea H un subconjunto de $\mathbf{N}$ *tal que*

II) $0 \in H$

III) *Si* $h \in H$ *entonces* $h + 1 \in H$

Entonces

$$H = \mathbf{N}$$

Teniendo en cuenta lo expresado en I) y II) H es inductivo, con lo que $\mathbf{N} \subset H$. Pero siendo H subconjunto de $\mathbf{N}$ es $H \subset \mathbf{N}$. Por lo tanto $H = \mathbf{N}$.

Este principio permite formular el siguiente **criterio de demostración por inducción:**

Sea P(n) una función proposicional con n recorriendo el conjunto de números naturales (o sea, una función proposicional predicable sobre **N***). (Con V se denota verdadera y con F falsa).*

Si

I) $P(0)$ es V (o eventualmente $P(1)$ es V)

II) $(\forall n),\ n \in \mathbf{N}$: $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ es V

entonces,

$P(n)$ es V, $(\forall n),\ n \in \mathbf{N}$.

4.3.2.1. Teorema

I) $a, b \in \mathbf{N}$ implican $a + b \in \mathbf{N}$

II) $a, b \in \mathbf{N}$ implican $a \,.\, b \in \mathbf{N}$

Demostración:

Se prueba I), dejando II) como ejercicio para el alumno. Sea $a \in \mathbf{N}$. Sea $K = \{b/b \in \mathbf{N}$ y $a + b \in \mathbf{N}\}$. Se afirma que K es inductivo. Primeramente se observa que siendo a natural, $a + 1 \in \mathbf{N}$, por lo tanto $1 \in K$. Además $b \in K$ equivale a decir que $a + b \in \mathbf{N}$. Pero entonces $a + (b + 1 = (a + b) + 1 \in \mathbf{N}$ o sea $b + 1 \in K$. Queda probada la afirmación. Se sigue que $K = \mathbf{N}$. Esto dice que $a + b \in \mathbf{N}$ cualquiera sea $b \in \mathbf{N}$. Como a es arbitrario, se concluye que $a + b \in \mathbf{N}$ cualesquiera sean a, b en **N**.

Las propiedades I), II) dicen respectivamente que **N** es un conjunto *aditivo y multiplicativo*.

En virtud de esta proposición se dice que **N** es estable por la suma y producto en **R** o también que la suma y producto en **R** inducen una suma y producto en **N**.

4.3.2.2. Definición

Sean a y b dos números naturales cualesquiera, con $a \leq b$.

Al entero natural x, tal que $a + x = b$, se le llama *diferencia* de a y b y se denota:

$$x = b - a.$$

Si tal entero existe, es único.

Ejemplos:

1) Probar por el método inductivo.

Sea A el siguiente conjunto de números naturales:

$$A = \{ n \in \mathbf{N} / \ 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \} \subset \mathbf{N}$$

Se trata de probar que A es un conjunto inductivo. Se supone una proposición P(n) definida sobre A, que puede ser verdadera o falsa;
A = {n ∈ A / P(n)}⊂ **N**, es decir cualquiera sea n ∈ A, satisface la propiedad P. Por el principio de inducción

i) 0 está en A
ii) si h pertenece a A, entonces h + 1 pertenece a A.

<u>Entonces</u> A es el conjunto de los números naturales.

En símbolos

$$A \subset \mathbf{N} \text{ y } \begin{pmatrix} i) & 0 \in A \\ ii) & h \in A \Rightarrow h+1 \in A \end{pmatrix} \Rightarrow A = N$$

Es decir, si A es un conjunto inductivo, entonces **N** por ser el menor conjunto inductivo, está incluido en cualquier conjunto inductivo, por lo tanto **N**⊂ A. Pero, se dijo que A es un subconjunto de **N** (por definición de A), por lo tanto A ⊂ **N**.

En consecuencia A = **N**.

Aplicando estos conceptos al conjunto del ejemplo, se tiene:

i) P(0) es verdadera

$$0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

ii) si P(h) ⇒ P(h+1), entonces P es verdadera para cualquier n ∈ A

y A = N.

$$1 + 2 + 3 + ... + h = \frac{h(h+1)}{2} \Rightarrow$$
$$1 + 2 + 3 + ... + (h + 1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

Ahora bien,

$1 + 2 + 3 + ... + h + (h + 1) = \dfrac{h(h+1)}{2} + (h + 1) = \dfrac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$; factorizando el numerador, queda

$\dfrac{h(h+1)+2(h+1)}{2} = \dfrac{(h+1)+(h+2)}{2}$, con lo que se demuestra que al sumarle a $\dfrac{h(h+1)}{2}$ el término siguiente, la expresión que se obtiene, coincide con la obtenida en la hipótesis de inducción.

Así, P(n) se cumple $\forall n \in A$, luego, A es inductivo. Como **N** está incluido en A por ser el menor conjunto inductivo, A = **N**.

NOTA.- Con el símbolo $\Rightarrow$ se denota el símbolo lógico de implicación.

Si p y q son proposiciones (oraciones que tienen un valor de verdad verdadero o falso), con $p \Rightarrow q$ se designa la proposición "{negación de p} o q":

$$\sim p \vee q$$

Suele llamarse implicación material. El uso que se le da aquí es el siguiente. Cuando se afirma que " $p \Rightarrow q$ es verdadera", se entiende fundamentalmente que si p (premisa) es una proposición verdadera, entonces q es una proposición verdadera y no se requiere ningún tipo de vinculación o asociación de ideas entre p y q y mucho menos aún, que " q se deduce de p". Por ejemplo, las siguientes proposiciones, son verdaderas:

"Posadas es la capital de La Rioja $\Rightarrow$ 1 + 1 = 3"

"Posadas es la capital de La Rioja $\Rightarrow$ 1 + 1 = 2"

simplemente porque las premisas son falsas.

4.3.3. Equipotencia

Definición:

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es equipotente a B si existe una biyección de A sobre B. Se denota entonces A $\surd$B.

Dado un conjunto A. Diremos que todo conjunto equipotente al A constituye una clase que se denomina un *cardinal* y se lo denota card A.

Definición:

Sean a, b $\in$ **N**. Se llama *intervalo natural* de extremos (izquierdo) a y (derecho) b al subconjunto,

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{N} / \ a \leq x \leq b\}$$

Así $[a, a] = \{a\}$.

Si a = 1, se llama a [1, b] el *intervalo natural inicial* de orden b.

4.3.4. Conjunto finito

Un conjunto se dice finito si es equipotente a un intervalo [1, n] *incluido en* **N**. *Se denota entonces card A = n.*

4.3.5. Conjunto infinito numerable

Un conjunto A se dice infinito numerable si es equipotente a ***N.*** *Es decir:*

$$Card\ A = Card\ \mathbf{N}$$

4.4. Sucesiones

4.4.1. Definición

Sea un intervalo inicial [1, b] de números naturales. Se llama *sucesión finita en* ***R*** a toda aplicación

$$x: [1, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

que se escribe en la forma tradicional $f_1, \ldots, f_b$ donde

$$x_1 = x(1), \ldots, x_i = x(i), \ldots, x_b = x(b)$$

Dicho de otra manera, una *sucesión* es una aplicación

$$f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R},$$

que a cada $n \in \mathbf{N}$ le asocia uno y solo un $x(n) = x_n$; es decir, en una sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de elementos de **R**, cada elemento x_{n-1}, se corresponde con un número natural n; se dice que n es el elemento *n*-ésimo de la sucesión. La sucesión se denota poniendo

$$(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{o simplemente } (x_n).$$

En una sucesión, de un elemento interesa, no solo su valor, sino también el lugar que ocupa en ella.

Ejemplos:

Son sucesiones las siguientes:

0, 0, 0, 0, 0
1, -1, 1, -1, 1
1, 2, 3, 4, 5
2, 4, 6, 8, 10
½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32
1,½, 1/3,¼, 1/5

(Notar que al dar una sucesión se da un orden entre sus elementos).

4.4.2. Suma y producto de sucesiones

Para una sucesión de números reales $x_1, x_2, ..., x_n$, se define su *suma* y su *producto*.

Por ejemplo, si se trata de una sucesión de 3 términos x_1, x_2, x_3, la suma está definida en forma natural (gracias a la propiedad asociativa).
Esta es

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \text{ que se escribe simplemente por}$$

$$x_1 + x_2 + x_3$$

La misma suerte con el producto.

Definición:

Dada una sucesión $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbf{N}$ de números reales se denomina *suma* de la sucesión al número real denotado por

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i \text{ o también } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ tal que } \sum_{i=1}^{i=1} x_i = x_1,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} x_i = (\sum_{i=1}^{i=n} x_i) + x_{n+1}$$

De manera similar se denomina *producto* de la sucesión, al número real denotado por

$$\prod_{i=1}^{i=n} x_i \quad \text{tal que}$$

a) $\prod_{i=1}^{i=1} x_i = x_1$

b) $\prod_{i=1}^{i=n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{i=n} x_i \right) \cdot x_{n+1}$

c) Dada una sucesión $a_o, a_1, \dots, a_n$ de números reales, se define

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

El principio de inducción asegura que tanto la suma como el producto quedan completamente definidos para todas las sucesiones finitas de números reales.

Ejemplos:

1) $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$ 2) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 1+4+9+16 = 30$

3) $\prod_{i=1}^{n} i = 1.2.3.4....(n-1)n = n!\,(\text{factorial de n})$ 4) $\prod_{i=1}^{3} (i+1)^i = (1+1)^1.(2+1)^2.(3+1)^3$

4.4.2.1. Fórmulas de sucesión aritmética y sucesión geométrica

Definición 1: Sucesión aritmética

Sea (u_n) una sucesión numérica, de primer término u_0 y tal que, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (r una constante llamada *razón o diferencia* de la sucesión). Entonces decimos que (u_n) es una *sucesión aritmética*.

Por ejemplo: Si $u_0 = 1$ y $r = 2$

$u_0 = 1$; $u_1 = u_0 + 2 = 3$, $u_2 = u_1 + 2 = 5$, $u_3 = u_2 + 2 = 7$,

Propiedades:

1. $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$; $u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$; ...;

$$\boxed{u_n = u_0 + nr,\ \forall n \in \mathbf{N},}$$

2. $u_n + u_0 = u_{n-1} + u_1 = u_{n-2} + u_2 = \ldots = u_{n-p} + u_p$;

3. con la excepción de u_0, cada término u_p es la media aritmética de los términos u_{p-1} y u_{p+1}; de lo que resulta:

$$u_p = ½(u_{p-1} + u_{p+1}).$$

4. La suma de los n primeros términos de la sucesión aritmética:

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} u_i$$

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}[2u_0 + (n-1)r]}$$

Ejemplos:

1. Sea la sucesión aritmética de primer término $u_0 = 1$ y de razón $r = 3$. ¿Cuál es el término número 1996?

El término 1996 es: $u_{1995} = u_0 + 1995 \cdot r = 1 + 3 \cdot 1995 = 5986$

2. Calcular $A = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

A es la suma de los n primeros términos de la sucesión aritmética de primer término $u_0 = 1$ y de razón $r = 1$:

$$A = \frac{n}{2}[2 + (n-1)] = \frac{n}{2}(n+1), \quad \text{luego:} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

<u>Definición 2</u>. Sucesiones geométricas

Sea (u_n) una sucesión de primer término u_0, y tal que, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q\, u_n$ (q es una constante llamada razón de la sucesión), decimos entonces que (u_n) es una *<u>sucesión geométrica</u>*.

Por ejemplo, si: $u_0 = 5$ y $q = -3$

$$u_0 = 5; \quad u_1 = -3 \cdot u_0 = -15; \quad u_2 = -3 \cdot u_1 = 45; \quad u_3 = -3 \cdot u_2 = -135; \quad \cdots$$

si $u_0 = 1$ y $q = ½$; los términos de la sucesión serán:

$$1;\ ½\ ;\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{2^3};\ \cdots$$

<u>Propiedades:</u>

1. $u_1 = q \cdot u_0$; $u_2 = q \cdot u_1 = q^2 \cdot u_0$; $u_3 = q \cdot u_2 = q^3 \cdot u_0$; $\cdots$;

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n \text{ , } \forall n \in \mathbf{N}}$$

2. $u_0 \cdot u_n = u_1 \cdot u_{n-1} = u_2 \cdot u_{n-2} = u_p \cdot u_{n-p}$

3. Con excepción de u_0; cada término u_p es igual a la media geométrica de los términos: u_{p-1} y u_{p+1} que se encuadran: $u_p^2 = u_{p-1} \cdot u_{p+1}$

4. la suma S_n de los n primeros términos de la sucesión geométrica:

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} u_i = u_0 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)} \quad \text{si } q = 1,\ S_n = nu_0$$

Ejemplos:

1. -Determinar el décimo término de la sucesión geométrica de primer término $u_0 = 1$ y de razón $q = 2$.

El décimo término será: $u_9 = u_0 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$.

2. Calcular: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

A es la suma de los n primeros términos de la sucesión geométrica de primer término $u_0 = 1$ y de razón $q = ½$:

$$A = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot [1-(\tfrac{1}{2})^n]$$

3.- Si la población de una Ciudad de Argentina en 1996 es de 400.000 habitantes; ¿cuál será la población en el año 2010, si se supone un crecimiento anual de 1,5% de la población durante ese periodo?

-sea P_0 la población en 1996, $P_0 = 400.000$
-la población en 1997 será: $P_1 = P_0 + \frac{1,5}{100} P_0 = P_0 \cdot 1,015$,

-la población en 1998 será: $P_2 = P_1 \cdot 1,015 = P_0 \cdot (1,015)^2$.

Esta población constituye una sucesión geométrica de primer término P_0 y de razón $q = 1,015$; en el año 2010, el término correspondiente a esta población será el término

$$P_{14} = P_0 \cdot q^{14} = 492.702 .$$

.

4.5. Enumeramientos

Comentario:

El análisis combinatorio es la ciencia y, en alguna medida, el arte de contar o enumerar los elementos de un conjunto *finito.* Por otra parte, un buen conocimiento de combinatoria, siempre útil, permite resolver muchos problemas de situaciones reales, como asimismo de probabilidad, de forma especialmente rápida y elegante.

4.5.1. Factorial

4.5.1.1. Definición

Sea n un número natural, se llama *factorial de n,* *y se denota n! , al número natural definido como sigue:*

a) 0! = 1;
b) Se supone definido n! , y se define (n + 1)! por

$$(n + 1)! = (n + 1).n!$$

Se obtiene así, por ejemplo:

$$1! = (0 + 1)! = (0 + 1).0! = 1.1 = 1, \qquad 2! = (1 + 1)! = (1 + 1).1! = 2 . 1 = 2$$

etc., y para todo $n \in$ **N*,**

$$n! = 1 . 2 .3 . ... . n$$

El factorial de n es el producto de todos los enteros de 1 a n.

La aplicación n $\rightarrow$ n!, queda además, de acuerdo al axioma de recurrencia, definido para todo **N**; es decir !: **N** $\rightarrow$ **N**:

Es decir la función factorial tiene dominio el conjunto **N** y por codominio al conjunto **N***. Es una función no inyectiva, dado que 0! = 1! = 1, y no sobreyectiva dado que no existe ningún número natural n cuyo factorial sea el número 3, (por ejemplo).

La gráfica de esta función, es decir el dibujo en el plano de {(n,p) / n!= p}, es un conjunto de puntos aislados.

*Simplificación***.** Muchas veces en el cálculo aparecen cocientes de factoriales que en la práctica convienen simplificar, (usando la definición) para un mejor manejo de manejo de los mismos. Por ejemplo:

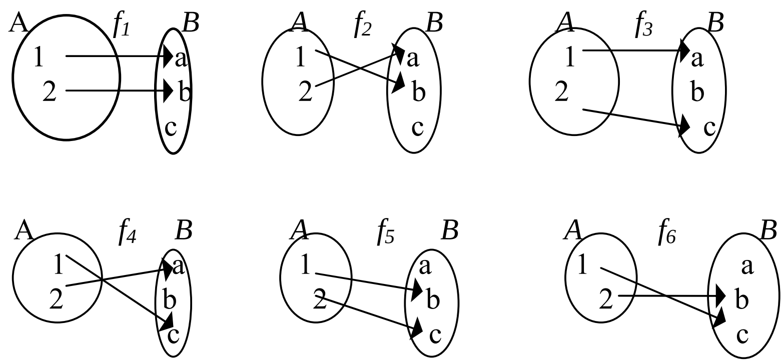
1.- $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+2).(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = (n+2).(n+1)$

2.– $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n-1).(n-2).(n-3)!}{(n-3)!} = (n-1).(n-2)$

Antes de definir arreglos o variaciones, vamos a considerar el siguiente problema:

-Dados los conjuntos A = {1,2}$\subset$ **N** y B = {a,b,c} . ¿Cuántas funciones inyectivas distintas, de A en B , se pueden definir?

Se puede resolver el problema haciendo los diagramas de Venn de todas las funciones inyectivas distintas:



Los seis diagramas representan a seis funciones inyectivas distintas, y no hay ninguna más.

Se debe notar que al ser el dominio A es un subconjunto de números naturales está totalmente ordenado por la relación usual de orden de números naturales, como además la función es inyectiva, se induce el mismo orden en el conjunto imagen de la función. Por consiguiente, las seis funciones quedan caracterizadas si se identifican a las seis imágenes distintas (respetando el orden establecido). Por ejemplo:

a,b	(imagen de A por f_1)
b,a	(imagen de A por f_2)
a,c	(imagen de A por f_3)
c,a	(imagen de A por f_4)
b,c	(imagen de A por f_5)
c,b	(imagen de A por f_6).

A cada una de las seis imágenes se les llama una variación o arreglo de 2 en 3 (o también de 2 elementos tomados de 3 elementos).

El problema a resolver es, entonces, hacer una definición de este concepto que nos permita: identificar a las variaciones con problemas reales y una formulación que nos permita calcular el número de arreglos posibles.

4.5.2. Arreglos o Variaciones

Se considera un conjunto B finito cualquiera, no vacío, de n elementos y sea $I_p = [1, p] \subset \mathbf{N}$ un intervalo inicial de **N** tal que $p \leq n$.

Definición:

Se llama arreglo de los n objetos de B, p a p, a la imagen de una inyección cualquiera de $I_p = [1, p]$ *en B.*

Sea f una de esas inyecciones, el orden estricto y total en el intervalo I_p define un orden estricto y total en el arreglo $f(I_p) \subset B$, de la siguiente manera: cualesquiera que sean los números distintos i y j de el intervalo I_p, si $i < j$, se dirá que $f(i)$ es anterior a $f(j)$ y se denotará $f(i) < f(j)$:

$$i < j \;\Rightarrow\; f(i) < f(j).$$

Se obtiene así, por grafo del arreglo,

$$f(I_p) = \{ a_1 , a_2 , ..., a_p \},$$

con

$$(\forall i \in I_p) \qquad a_i \in B.$$

<u>En otros términos</u>: *se llaman <u>variaciones o arreglos</u> de n elementos tomados de p en p, al número de colecciones distintas que pueden formarse con p elementos distintos entre los n, siendo dos colecciones distintas aquellas que tienen algún elemento distinto, o teniendo los mismos elementos, están en distinto orden.*

4.5.2.1. <u>Número de arreglos</u>

El problema que se propone ahora es el siguiente:

¿Cuál es el número total de arreglos de n objetos de B, p a p?

La respuesta se da por el siguiente teorema:

<u>Teorema 1.</u>

Dado el conjunto B de n elementos y un número natural p tal que $1 \leq p \leq n$, el número total de las funciones inyectivas de [1, p] en B viene dado por:

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1).$$

Demostración:

Se toma $I_p = [1, p]$ y se razona por recurrencia sobre p, limitada a [1, n].

1° El teorema es verdadero para p = 1. En efecto, el intervalo $I_1 = \{1\}$ no tiene más que un elemento. Una inyección de I_1 en B queda entonces determinada toda vez que se fije la imagen de 1 que es única. Como hay n elementos en B hay en consecuencia, n funciones inyectivas.

2° Sea $1 \leq p \leq n$. Se supone que el número de las inyecciones de I_p en B sea igual a

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1).$$

Se debe demostrar que el número de funciones inyectivas de I_{p+1} en B es igual a

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)(n - p)$$

(número deducido del precedente y multiplicado por $n - p$, es decir, $[(n - p + 1) - 1]$.

Sea f un inyección de I_p en B. Entonces, $f(I_p)$ contiene p elementos. Se puede extender f en una inyección de I_{p+1} en B definiendo $f(p + 1)$.

Ahora, B - $f(I_p)$ contiene n - p elementos; hay entonces n - p elecciones posibles para la imagen $f(p + 1)$. Toda inyección de I_p en B se extiende en consecuencia en n - p inyecciones de I_{p+1} en B. Como toda inyección de I_{p+1} en B es la extensión de una inyección de I_p en B, el teorema queda demostrado.

Notación.

Se denota $A_{n,p} = V_{n,p} = n(n . 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)$; se tiene evidentemente

$$A_{n,p} = V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Caso particular.

Si $p = n$, se obtiene

$$A_{n,n} = V_{n,n} = n!$$

Corolario:

Sea B un conjunto de n elementos, el número total de biyecciones de [1, n] sobre B es n!

Ejemplos:

1- ¿En cuántas formas pueden fotografiarse 5 personas en grupo alineados de 3 personas?

Respuesta: $V_{5,3}$.

2- En una sala de diversiones hay 10 juegos individuales distintos. ¿En cuántas formas pueden ocuparlos 5 personas?

Respuesta: $V_{10,5}$.

4.5.3. Permutaciones de un conjunto finito

Se llaman permutaciones ordinarias en el conjunto B = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_p\}$ de p elementos, a las diferentes agrupaciones que pueden formarse con dichos elementos, tomados de p en p (distintos todos ellos) las cuales solo diferirán en el orden de colocación de los mismos.

Se puede observar que hay tantas aplicaciones biyectivas posibles como permutaciones de los elementos a_1, a_2, a_3, ... a_p , y que cada permutación está formada por las imágenes de los elementos 1, 2, .. . p del intervalo inicial [1, p], con lo que se puede afirmar que "las permutaciones ordinarias en el conjunto B = {a_1, a_2, a_3, ... a_p} de p elementos son tantas como aplicaciones biyectivas pueden establecerse de un conjunto arbitrario A también de p elementos, y en cada aplicación biyectiva las imágenes, constituyen una permutación diferente en B.

En el teorema 1 se puede tomar, en lugar del intervalo [1, p], un conjunto cualquiera I_p que tenga p elementos. Se obtiene así el enunciado más general:

Sea I_p un conjunto cualquiera de p elementos y B un conjunto cualquiera de n elementos ($1 \leq p \leq n$), el número total de las inyecciones de I_p en B es

$$n(n - 1) \ldots (n - p + 1).$$

En particular, I_p puede ser una parte de B.

Si I_p = B, entonces se sabe que una inyección de B sobre sí mismo es biyectiva y se denomina <u>*permutación de*</u> B.

Es decir:

4.5.3.1. <u>Definición</u>

Sea B = [1, p] = {1,2, ..., p} el intervalo inicial de orden p. Se llama permutación de B a toda aplicación $f : B \to B$ <u>biyectiva.</u>

Es costumbre denotarlas con las matrices:

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & i & & p \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(i) & \ldots & f(p) \end{pmatrix}$$

escribiendo debajo de cada y el valor *f(i)* asignado por la función. De esta forma una permutación está dada por la sucesión:

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \ldots \quad f(p)$$

de números en [1, p]. Por ejemplo si $p = 2$ hay solo dos permutaciones: 12 y 21, que corresponden respectivamente a las aplicaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si $p = 3$ hay 6 permutaciones

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

correspondiente a las aplicaciones:

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\1\ 2\ 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\1\ 3\ 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 1\ 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\3\ 1\ 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\3\ 2\ 1\end{pmatrix}$$

Se tiene así el teorema:

Teorema 2.

El número de las permutaciones de un conjunto B de n elementos es n!

OBSERVACIÓN. Es usual que en lugar de decir arreglos de n objetos de B, n a n, se diga "permutación de los n objetos", confundiendo la aplicación "permutación de B" con la imagen que ella da de B. Se trata aquí de no cometer esta confusión y se usará el nombre de arreglo para designar a la imagen.

Ejemplo 1:

¿De cuántas formas pueden fotografiarse una familia de 5 personas puestas en hilera?

Respuesta: $5! = 120$.

El mismo problema pero ahora se pide que la madre y el padre estén siempre juntos.

Respuesta: $2 \,.\, 4! = 48$.

En efecto, es este caso padre y madre forman un solo objeto de manera que se trata de permutaciones de 4 objetos. Pero además hay dos formas en que pueden ubicarse, uno respecto del otro.

Ejemplo 2:

¿De cuántas formas pueden fotografiarse 6 chicas y 7 chicos puestos en hilera pero de manera tal que nunca aparezcan juntos dos personas del mismo sexo?

Respuesta: $6! \,.\, 7!$

Ejemplo 3:

3 parejas van al teatro y sacan 6 entradas consecutivas de una misma fila que reparten al azar. El espacio muestral tiene de cardinal el número de permutaciones de 6 elementos.

Respuesta: $6! = 720$.

Tienen 720 formas diferentes de sentarse los 6.

4.5.3.2. Inversiones en una permutación

Se llama inversión a todo par de subíndices de una permutación, que esté en orden inverso al natural.

(a_1 a_2 a_3 a_4) no tiene inversiones,
(a_2 a_1 a_3 a_4) tiene la inversión (2-1),
la (a_3 a_1 a_4 a_2) tiene tres inversiones (3-1) ; (3-2) ; y (4-2).

La permutación se llama de "clase par" o de "clase impar" según que el número de inversiones de los subíndices sea par o impar.

Si el número de inversiones es cero, se considera de clase par.

4.5.4. Combinaciones

Comentario:
En lo precedente, además de establecer nociones generales sobre algunas formas de contar, hemos estudiado algunas situaciones que aparecen con frecuencia en Combinatoria. Por ejemplo, hemos desarrollado fórmulas para el cálculo de ***permutaciones y variaciones***, esto es, elecciones ordenadas de una cierta cantidad de elementos, sin repetición. Cuando no nos importa el orden en que los objetos son elegidos, nos referimos a *combinaciones* de los mismos. Por lo tanto, las combinaciones de n objetos tomados de a p, pueden describirse como todas las formas posibles de elegir un subconjunto de p elementos, en un conjunto de n elementos. Debe quedar claro aquí que la expresión "conjunto de p elementos" designa, por supuesto, a p elementos **distintos.**

Antes de hacer una definición formal de este concepto, se considera el siguiente problema:

Dados los conjuntos I_3= [1, 3] y el conjunto B = {1, 2, 3, 4}, ¿Cuántas funciones inyectivas existen de I_3 en B? La respuesta es $A_{4,3}$ = 4 . 3 . 2 = 24 funciones inyectivas y se pueden representar por:

123,	132,	213,	231,	312,	321
124,	142,	214,	241,	412,	421
134,	143,	314,	341,	413,	431
234,	243,	324,	342,	423,	432

Ahora bien, de acuerdo a lo que se dijo en el comentario inicial, se puede decir, en general, que dado un conjunto finito, se llama combinación de orden p a todo subconjunto de p elementos. Es claro que cada variación de p en n determina una combinación (la combinación se forma con los elementos de la variación). Pero distintas variaciones pueden dar lugar a la misma combinación. En el ejemplo anterior, las variaciones de 3 en 4 que hemos enumerado más arriba dan lugar a sendas combinaciones cuando ignoramos el orden de los elementos. Estas son: 123, 124, 134 y 234.

4.5.4.1. Definición

Sea B un conjunto no vacío de n elementos y p un número natural tal que $1 \leq p \leq n$.

Definición.

Se llama combinación de los n elementos de B, p a p, a toda parte de B de p elementos.

En una combinación, ningún orden interviene en estos p objetos.

Por lo dicho anteriormente, siendo las combinaciones de n objetos aquellos arreglos que se diferencian en por lo menos un elemento, bajo el supuesto de conocer el número de combinaciones de n elementos tomados de p en p, fácilmente obtenemos el total de variaciones de esos mismos objetos, también de p en p, si en cada combinación procedemos a alterar el orden de disposición de sus elementos en todas las formas posibles. Pero, como cada combinación tiene p objetos distintos, alterar su orden en todas las formas posibles y computar su número es hallar las permutaciones de p elementos. Por lo tanto, a partir de las combinaciones, es posible calcular el número de variaciones de igual orden si, a cada una de ellas, le efectuamos las permutaciones indicadas.

El número de las combinaciones de n objetos p a p está dado por el teorema siguiente:

Teorema 3.

Dado un conjunto B de n elementos, el número de partes de B que tienen p elementos ($1 \leq p \leq n$) es:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

Demostración:

Se considera al conjunto F de todas las inyecciones de $I_p = [1, p]$ en B. Se sabe que F contiene:

$n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$ funciones inyectivas (teorema 1).

Si $f \in F$, entonces $f(\mathrm{I}_p)$ es una parte de B que tiene p elementos. Se van a contar, en F, las inyecciones que dan de I_p la misma imagen $A \subset B$. Para ello, se estudia la relación binaria siguiente en F :

$$f \equiv g \quad \Leftrightarrow \quad f(I_p) = g(I_p)$$

La relación $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva (queda como ejercicio probarlo). Es decir es una relación de equivalencia. Por consiguiente parte a F en clases. Todas las inyecciones de una clase dan la misma imagen en B y toda parte A de B que tenga p elementos define una y solo una clase. El número de clases es en consecuencia igual al número buscado de partes de B que tienen p elementos.

Se busca ahora el número de funciones en cada clase. A todo par f, g tal que $f \equiv g$, se le asocia una aplicación h de I_p en I_p de la manera siguiente:

$$(f, g) \rightarrow h;$$

$$h : \mathrm{I}_p \rightarrow \mathrm{I}_p$$
$$x \xrightarrow{h} y = h(x) \quad \text{tal que } f(x) = g(y).$$

La aplicación h ha sido bien definida pues, a todo x de I_p le corresponde uno, y solo un y, de I_p tal que $f(x) = g(y)$, dado que g es inyectiva y que

$$f(I_p) = g(I_p).$$

Además, h es biyectiva, pues todo y de I_p es la imagen de uno y solo un elemento x de I_p, ya que f es inyectiva.

En consecuencia, h es una *permutación* de I_p. Además,

$$(\forall\, x \in \mathrm{I}_p) \qquad f(x) = g(y) = g[h(x)],$$

de lo que surge que $f = g \circ h$.

Por último, para f y g dadas en una misma clase, la permutación h es única.

Si se designa por P, al conjunto de las permutaciones de I_p, se acaba de demostrar:

$$f \equiv g \quad \Rightarrow \quad (\exists!\, h \in P \quad \text{tal que} \quad f = g \circ h).$$

La recíproca es inmediata: si existe una permutación h de I_p tal que $f = g \circ h$, se tiene evidentemente $f(\mathrm{I}_p) = g(\mathrm{I}_p)$, entonces $f \equiv g$.

En consecuencia, el número de los elementos f de una clase de equivalencia representada por g es igual al número de las permutaciones de P. Se sabe que este número es $p!$ (teorema 2).

Como el número total de las funciones de F es $A_{n,p}$, el número total de las clases es entonces:

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El teorema 3 queda demostrado.

Notaciones.

El número de las combinaciones de n objetos p a p se denota $C_{n,p}$. Se tiene

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Es costumbre denotar a este último número como:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad .$$

Se puede extender esta fórmula a $p = 0$, si se recuerda que $0! = 1$, con lo que $C_{n,0} = 1$. Dado que:

$$C_{n,0} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!.0!} = \frac{n!}{n!.1} = 1.$$ Tambien se define:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = 0 \qquad \text{si} \qquad n < p.$$

<u>Ejemplos</u>*:*

1.- En una carrera compiten 10 corredores y se clasifican los tres primeros para la siguiente fase. ¿De cuántas maneras puede producirse la clasificación?

$$C_{10,3} = \frac{V_{10,3}}{P_3} = \frac{10\ .\ 9\ .\ 8}{3\ .\ 2} = 120$$

2.- Se reparten tres globos entre seis amigos. El número de posibles repartos es

$$C_{6,3} = 20.$$

3.- ¿Cuántos equipos de fútbol se pueden formar con 15 personas, si un equipo tiene once integrantes?

4.- ¿Cuántas líneas quedan determinadas en el plano por 8 puntos no alineados de a 3?

4.5.4.2. Propiedades

$\boxed{P_1}$ $\quad C_{n,p} = C_{n,n-p}$; o tambien $\quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

En efecto,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

el cociente no cambia cuando se reemplaza p por $n - p$.

$\boxed{P_2}$ $\quad n > p \geq 1$ *implica*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

En efecto,

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}[(n-p)+p] = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Esta propiedad nos enseña cuándo la suma de dos números combinatorios es cerrada:

Dos números combinatorios se pueden sumar cuando tienen el mismo numerador (n - 1) y sus denominadores son consecutivos (p y p - 1), el resultado es otro número combinatorio que tiene por numerador al anterior incrementado en 1, esto es p; y como denominador al mayor de los dos denominadores dados p.

Esta suma de números combinatorios, permite definir por recurrencia, los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton para cada número natural n.

Escribiendo la relación anterior para variados valores de n y p se obtiene el triángulo de Pascal

4.5.4.3. Triángulo de Pascal

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
n = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
n = 10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Ahora bien, la P_1 : $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, se interpreta de la siguiente manera: *cada subconjunto de p elementos en [1, n] determina unívocamente un subconjunto de n - p elementos.*

En cambio, la P_2 : $C_{n,p} = C_{n-1,\,p} + C_{n-1,\,p-1}$; dice que: *las combinaciones de p elementos de n , se clasifican en dos subconjuntos disjuntos:*

A: los que contienen a n ,
B: los que no contienen a n.
Entonces A tiene $C_{n-1,\,p-1}$ elementos y B tiene $C_{n-1,\,p}$ elementos.

Los subconjuntos no vacíos de [1, n] se pueden clasificar en subconjuntos de 1 elemento, subconjuntos de 2 elementos , etc., esto no lleva a la fórmula

$$2^n = C_{n,0} + C_{n,1} + \ldots + C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

En términos del triángulo de Pascal significa que los elementos de la fila n suman 2^n.

4.6. Binomio de Newton

4.6.1. Definición y ejemplos

Consideremos un anillo conmutativo A. Sea n un número natural y x e y dos elementos de A.

Se denomina *binomio de Newton* al elemento $(x + y)^n$ del anillo A.

Por ejemplo, de acuerdo a las propiedades de las leyes de composición en un anillo A conmutativo:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 .$$

El problema que se quiere resolver es encontrar un desarrollo para $(x + y)^n$, cualquiera se el número natural n.

4.6.2. Notación

Sean $a_1 , a_2 , a_3 , \cdots a_n$, elementos en número finito de un semigrupo aditivo E. La suma siguiente :

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Se denota :

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ejemplo en N:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{n}$$

4.6.3. Teorema

Sea A un anillo conmutativo, x e y dos elementos de A y n un número natural no nulo. Entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Demostración.

Razonamos por recurrencia sobre el número n.

1º La relación es verdadera para $n = 1$.

La sumatoria se efectúa sobre dos términos:

$$x + y = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y \; ; \qquad donde \quad \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1 .$$

2º Suponemos la ley válida para n y demostrémosla para n + 1. Por hipótesis de recurrencia,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Multiplicando los dos miembros por $(x + y)$, se obtiene

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n+1-k}$$

Sea p un número natural tal que $0 < p < n + 1$, buscamos los terminos en $x^p y^{n+1-p}$. Hay dos.

a) Uno proviene de la primer suma con $k + 1 = p$.

Escribimos entonces ésta primer suma con el índice p de suma y sacando el último término x^{n+1} fuera de esta sumatoria;

b) El otro proviene de la Primer sumatoria con $k = p$,

$$\sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} x^p y^{n+1-p} = x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} x^p y^{n+1-p}$$

Escribimos esta sumatoria con el índice p y sacamos de la misma el primer término y^{n+1};

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n+1-p} = y^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n+1-p}$$

De manera que en definitiva,

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left[\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right] x^p y^{n+1-p} + y^{n+1}$$

Aplicando la propiedad de la suma de números combinatorios, se tiene:

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} x^p y^{n+1-p} + y^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} x^p y^{n+1-p}$$

El teorema queda demostrado.

Bibliografía:

Lentin, A.; Rivaud, J. Álgebra Moderna. Aguilar.
Pécastaings, F. Chemins vers l'Algèbre. Vuibert.
Queysanne, M.Álgebra Básica-Editorial Vicens-Vives.

GUÍA Nº3: *Enumeramientos. Sucesiones*

Ejercicio Nº1. Escriba en forma explícita las siguientes sumas y productos:

a) $\sum_{k=1}^{5} k$ b) $\sum_{j=1}^{7} r^{j}$ c) $\sum_{i=2}^{6} a^{2i}$ d) $\sum_{i=1}^{5} (i^3 + 3i^2)$ e) $\prod_{i=1}^{n+1} i$ f) $\prod_{k=1}^{5} k$

Ejercicio Nº2. Probar cada una de las siguientes fórmulas por inducción matemática.

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ c) $1 + 3 + 5 + ... +(2n - 1) = n^2$

Ejercicio Nº3. Simplificar las siguientes expresiones ($n \in \mathbf{N}$).

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ $(n \geq 2)$ b) $\frac{(n+2)!}{n!}$ c) $\frac{(n+2)!}{(n-2)!}$ d) $\frac{n!}{n!+3}$

Ejercicio Nº4. Calcular:

a) 3! b) 0! c) n, si $\frac{n!}{(n-1)!} = 3$ d) $(n - 1)$, si $\frac{n!}{(n-1)!\,2!} = 4$

Ejercicio Nº5. Calcular: a) $C_{5,2}$; $V_{5,2}$; P_5 b) $C_{6,4}$; $V_{6,4}$; P_4

Ejercicio Nº6. Resolver:

a) ¿De cuántas formas puede fotografiarse una familia de 5 personas puestas en hilera?
b) Mismo problema pero se pide ahora que la madre y el padre estén siempre juntos.

c) Mismo problema pero se pide que la madre, el padre y Cachito aparezcan siempre juntos.

Ejercicio Nº7. ¿Cuántos equipos de fútbol pueden formarse con 20 jugadores, si dos de ellos juegan de arqueros y los restantes en cualquier otra posición?

Ejercicio Nº8. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 12 libros en un estante, si tres de ellos deben estar juntos?

Ejercicio Nº9. Calcular: a) $\binom{3}{0}$ b) $\binom{7}{1}$ c) $\binom{8}{6}$ d) $\binom{5}{5}$

Ejercicio Nº10. a) Probar que $3^2 = 2\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

b) Hallar n si: $2\binom{n}{2} = 12$

Ejercicio Nº11. Desarrollar (usando la fórmula del Binomio de Newton):

1) $(a - 2)^4$ 2) $(\sqrt{x} - 2)^5$ 3) $(3x + 6)^6$ 4) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$ 5) $(x - 2y)^7$

Ejercicio Nº12. Sucesiones reales.

1) Para cada una de la siguientes sucesiones, escribir los cinco primeros términos y representar gráficamente:

a) $(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$ b) $(a_n) = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ c) $(a_n) = \dfrac{n^2}{n+1}$ d) $(a_n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$

2) Indicar si las sucesiones definidas en 1) son acotadas y monótonas.